

2026-01

Value-at-Risk  
 S & P 500

Value-at-Risk

S & P 500

<http://hdl.handle.net/11728/13355>

Downloaded from HEPHAESTUS Repository, Neapolis University institutional repository



## **ΣΧΟΛΗ**

**Τραπεζική, Χρηματοοικονομική και Επενδύσεις**

### **ΤΙΤΛΟΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ**

**Συγκριτική Αξιολόγηση Μεθόδων Value-at-Risk υπό  
Συνθήκες Μόχλευσης και Διαφοροποιημένων  
Καθεστώτων Αγοράς: Εμπειρική Εφαρμογή στον  
Δείκτη S&P 500**

**ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ : ΤΑΜΠΟΥΡΑΣ ΘΕΟΔΩΡΟΣ**

**ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΑ :**

**ΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ**

**ΜΗΝΑΣ/ΕΤΟΣ : ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2026**



## **ΣΧΟΛΗ**

**Τραπεζική Χρηματοοικονομική και Επενδύσεις**

### **ΤΙΤΛΟΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ**

**Συγκριτική Αξιολόγηση Μεθόδων Value-at-Risk υπό**

**Συνθήκες Μόχλευσης και Διαφοροποιημένων**

**Καθεστώτων Αγοράς: Εμπειρική Εφαρμογή στον**

**Δείκτη S&P 500**

**Διπλωματική Εργασία η οποία υποβλήθηκε προς απόκτηση  
μεταπτυχιακού τίτλου σπουδών στη Τραπεζική,  
Χρηματοοικονομική και Επενδύσεις στο Πανεπιστήμιο  
Νεάπολις Πάφος**

**ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ : ΤΑΜΠΟΥΡΑΣ ΘΕΟΔΩΡΟΣ**

**ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ :**

**ΜΗΝΑΣ/ΕΤΟΣ : ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2026**

## **Πνευματικά δικαιώματα**

Copyright © Ταμπούρας Θεόδωρος, 2026

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Πανεπιστήμιο Νεάπολις δεν υποδηλώνει απαραίτητως και αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα εκ μέρους του Πανεπιστημίου.

**ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ****ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ**

## Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 .....	12
1.1 Εισαγωγή .....	12
1.2 Έννοια και Κατηγορίες Χρηματοοικονομικού Κινδύνου .....	12
1.3 Κίνδυνος Αγοράς και Χρηματιστηριακοί Δείκτες .....	13
1.4 Μόχλευση και Ενίσχυση του Κινδύνου .....	14
1.5 Η Ανάγκη για Συνοπτικά Μέτρα Κινδύνου .....	14
1.6 Σκοπός και Ερευνητικά Ερωτήματα της Εργασίας .....	15
1.7 Σύνοψη Κεφαλαίου .....	15
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 .....	16
Θεωρητικό και Κανονιστικό Πλαίσιο του Value-at-Risk (VaR): Μέθοδοι Εκτίμησης, Backtesting και Κριτική .....	16
2.1 Ορισμός και Εννοιολογικό Πλαίσιο του Value-at-Risk.....	16
2.2 Ιστορική Εξέλιξη και Κανονιστικό Πλαίσιο .....	16
2.3 Ταξινόμηση Μεθόδων Εκτίμησης του VaR.....	17
2.4 Parametric (Variance–Covariance) Value-at-Risk.....	18
2.5 Historical Simulation Value-at-Risk.....	18
2.6 Filtered Historical Simulation Value-at-Risk.....	19
2.7 Value-at-Risk και Καθεστώτα Αγοράς.....	19
2.8 Backtesting του Value-at-Risk.....	19
2.9 Κριτική του VaR και Εναλλακτικά Μέτρα Κινδύνου .....	20
2.10 Σύνοψη Κεφαλαίου .....	20
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 .....	21
Μεθοδολογία και Ερευνητικός Σχεδιασμός .....	21
3.1 Περιγραφή Δεδομένων, Πλαίσιο Ανάλυσης και Στατιστικά Χαρακτηριστικά.....	21
3.2 Κατασκευή Χαρτοφυλακίου και Πλαίσιο Μόχλευσης.....	22
3.3 Πληροφοριακό Πλαίσιο, Ορισμός του Value-at-Risk και Χρονικός Ορίζοντας.....	23
3.4 Μεθοδολογικό Πλαίσιο Εκτίμησης του Value-at-Risk.....	24
3.5 Historical Simulation Value-at-Risk.....	25
3.5.1 Rolling Window και Εμπειρική Κατανομή .....	25

3.5.2 Εκτίμηση του VaR μέσω Εμπειρικών Ποσοστημορίων.....	26
3.6 Filtered Historical Simulation (FHS) με φίλτρο EWMA .....	27
3.6.1 Φιλτράρισμα Μεταβλητότητας μέσω EWMA .....	29
3.6.2 Τυποποιημένα Υπολείμματα και Επαναδειγματοληψία.....	31
3.6.3 Εκτίμηση του Value-at-Risk στο πλαίσιο του FHS.....	32
3.7 Parametric (Variance–Covariance) Value-at-Risk.....	33
3.7.1 Εκτίμηση παραμέτρων .....	33
3.7.2 Κλειστή Μορφή του VaR .....	34
3.8 Μεθοδολογία Backtesting του VaR .....	34
3.8.1 Unconditional coverage (ορθή βαθμονόμηση).....	34
3.8.2 Independence of violations (χρονική δυναμική).....	35
3.8.3 Στατιστικοί έλεγχοι Kupiec και Christoffersen.....	35
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 .....	36
ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ VaR ΚΑΙ BACKTESTING ΣΕ ΜΟΧΛΕΥΜΕΝΗ ΘΕΣΗ ΣΤΟΝ S&P 500.....	36
4.1 Σκοπός και ερευνητικό πλαίσιο του Κεφαλαίου .....	36
4.2 Προετοιμασία δεδομένων και κατασκευή μεταβλητών .....	37
4.3 Εκτίμηση VaR με Parametric (Variance–Covariance) μοντέλο .....	38
4.3.1 Εκτίμηση rolling μέσου και rolling μεταβλητότητας .....	38
4.3.2 Parametric VaR σε όρους ζημίας.....	39
4.4 Εκτίμηση VaR με Historical Simulation (HS) .....	39
4.4.1 Μη παραμετρική κατασκευή της εμπειρικής κατανομής ζημιών .....	39
4.5 Εκτίμηση VaR με Filtered Historical Simulation (FHS–EWMA) .....	42
4.5.1 Φιλτράρισμα μεταβλητότητας μέσω EWMA .....	42
4.5.2 Τυποποιημένα υπολείμματα και επανακλιμάκωση ποσοστημορίων .....	42
4.6 Backtesting: Ορισμός υπέρβασης και βασικές αρχές αξιολόγησης.....	44
4.7 Kupiec POF: Άνευ όρων κάλυψη (Unconditional Coverage) .....	45
4.8 Christoffersen: Independence και Conditional Coverage .....	46
4.8.1 Markov προσέγγιση και μεταβάσεις $n_{ij}$ .....	46
4.8.2 Ενδεικτική πράξη – HS 95%.....	46
4.9 Συγκεντρικά αποτελέσματα backtesting ( $T^*=2016$ ) .....	47
4.10 Ερμηνεία αποτελεσμάτων ανά μέθοδο .....	48
4.10.1 Parametric (Variance–Covariance) VaR .....	48

4.10.2 Historical Simulation (HS) .....	49
4.10.3 Filtered Historical Simulation (FHS–EWMA).....	49
4.11 Συνολική αξιολόγηση και σύνδεση με τη μεθοδολογία του Κεφαλαίου 3 .....	50
4.12 Σύνοψη Κεφαλαίου .....	51
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 .....	52
5.1 Εισαγωγή .....	52
5.2 Συνοπτική παρουσίαση βασικών εμπειρικών ευρημάτων .....	52
5.2.1 Η συχνότητα υπερβάσεων δεν αρκεί: ο ρόλος του clustering .....	52
5.2.2 Το Parametric (variance–covariance) VaR: συντηρητικότητα αλλά ανεπαρκής δυναμική .....	53
5.2.3 Το Historical Simulation: αποδεκτό στο 95% αλλά αδύναμο στο 99%.....	53
5.2.4 Το Filtered Historical Simulation: βελτιώνει την independence αλλά αποτυγχάνει στο 99% quantile .....	53
5.3 Οικονομική ερμηνεία των αποτελεσμάτων υπό μόχλευση .....	54
5.3.1 Η μόχλευση ως μηχανισμός ενίσχυσης του tail risk.....	54
5.3.2 Καθεστώτα αγοράς και ρυθμιστική σημασία .....	54
5.4 Επιπτώσεις για την πρακτική διαχείριση κινδύνου (Risk Management Implications) .....	54
5.4.1 Model risk και επιλογή μεθοδολογίας .....	54
5.4.2 Risk limits, governance και backtesting culture .....	55
5.4.3 Από το VaR στο Expected Shortfall: φυσική επέκταση.....	55
5.5 Περιορισμοί της παρούσας μελέτης .....	55
5.6 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα (Future Research Directions) .....	56
5.7 Τελικό συμπέρασμα .....	56

## **Σελίδα Εγκυρότητας**

**Όνοματεπώνυμο Φοιτητή:** Ταμπούρας Θεόδωρος

**Τίτλος Διπλωματικής Εργασίας:** Συγκριτική Αξιολόγηση Μεθόδων Value-at-Risk υπό Συνθήκες Μόγλευσης και Διαφοροποιημένων Καθεστώτων Αγοράς: Εμπειρική Εφαρμογή στον Δείκτη S&P 500

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση εξ αποστάσεως μεταπτυχιακού τίτλου στο Πανεπιστήμιο Νεάπολις και εγκρίθηκε στις ..... [ημερομηνία έγκρισης] από τα μέλη της Εξεταστικής Επιτροπής.

### **Εξεταστική Επιτροπή:**

Πρώτος επιβλέπων (Πανεπιστήμιο Νεάπολις Πάφος).....[ονοματεπώνυμο, βαθμίδα, υπογραφή]

Μέλος Εξεταστικής Επιτροπής: .....[ονοματεπώνυμο, βαθμίδα, υπογραφή]

Μέλος Εξεταστικής Επιτροπής: .....[ονοματεπώνυμο, βαθμίδα, υπογραφή]

## **ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ**

Ο Ταμπούρας Θεόδωρος, γνωρίζοντας τις συνέπειες της λογοκλοπής, δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα εργασία με τίτλο «**Συγκριτική Αξιολόγηση Μεθόδων Value-at-Risk υπό Συνθήκες Μόχλευσης και Διαφοροποιημένων Καθεστώτων Αγοράς: Εμπειρική Εφαρμογή στον Δείκτη S&P 500**», αποτελεί προϊόν αυστηρά προσωπικής εργασίας και όλες οι πηγές που έχω χρησιμοποιήσει, έχουν δηλωθεί κατάλληλα στις βιβλιογραφικές παραπομπές και αναφορές. Τα σημεία όπου έχω χρησιμοποιήσει ιδέες, κείμενο ή/και πηγές άλλων συγγραφέων, αναφέρονται ευδιάκριτα στο κείμενο με την κατάλληλη παραπομπή και η σχετική αναφορά περιλαμβάνεται στο τμήμα των βιβλιογραφικών αναφορών με πλήρη περιγραφή.

**Ο Δηλών**

**Ταμπούρας Θεόδωρος**

**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

- Basel Committee on Banking Supervision (BCBS) (1996) *Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks*. Basel: Bank for International Settlements.
- Basel Committee on Banking Supervision (BCBS) (1999) *Risk Management Guidelines for Derivatives*. Basel: Bank for International Settlements.
- Brunnermeier, M.K. and Oehmke, M. (2013) 'The maturity rat race', *Journal of Finance*, 68(2), pp. 483–521.
- Christoffersen, P.F. (1998) 'Evaluating interval forecasts', *International Economic Review*, 39(4), pp. 841–862.
- Christoffersen, P.F. (2003) *Elements of Financial Risk Management*. San Diego: Academic Press.
- Christoffersen, P.F. and Pelletier, D. (2004) 'Backtesting Value-at-Risk: A duration-based approach', *Journal of Financial Econometrics*, 2(1), pp. 84–108.
- Cont, R. (2001) 'Empirical properties of asset returns: Stylized facts and statistical issues', *Quantitative Finance*, 1(2), pp. 223–236.
- Crouhy, M., Galai, D. and Mark, R. (2000) *Risk Management*. New York: McGraw-Hill.
- Dowd, K. (2005) *Measuring Market Risk*. 2nd edn. Chichester: John Wiley & Sons.
- Engle, R.F. (1982) 'Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of UK inflation', *Econometrica*, 50(4), pp. 987–1007.
- Hull, J.C. (2021) *Risk Management and Financial Institutions*. 6th edn. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Jorion, P. (1996) 'Risk<sup>2</sup>: Measuring the risk in value at risk', *Financial Analysts Journal*, 52(6), pp. 47–56.
- Jorion, P. (2001) *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. 3rd edn. New York: McGraw-Hill.
- Jorion, P. (2007) *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. 4th edn. New York: McGraw-Hill.
- Knight, F.H. (1921) *Risk, Uncertainty and Profit*. Boston, MA: Houghton Mifflin.
- Kupiec, P.H. (1995) 'Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models', *The Journal of Derivatives*, 3(2), pp. 73–84.
- Longerstaeey, J. and Spencer, M. (1996) *RiskMetrics™ Technical Document*. 4th edn. New York: J.P. Morgan/Reuters.

- Mandelbrot, B.B. (1963) ‘The variation of certain speculative prices’, *Journal of Business*, 36(4), pp. 394–419.
- Markowitz, H. (1959) *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. New York: John Wiley & Sons.
- McNeil, A.J., Frey, R. and Embrechts, P. (2015) *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Revised edn. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- RiskMetrics Group (1996) *RiskMetrics™ – Technical Document*. New York: J.P. Morgan.
- Alexander, C. (2008) *Market Risk Analysis, Volume IV: Value-at-Risk Models*. Chichester: John Wiley & Sons.
- Barone-Adesi, G., Giannopoulos, K. and Vosper, L. (1999) ‘VaR without correlations for portfolios of derivative securities’, *Journal of Futures Markets*, 19(5), pp. 583–602.
- Bernstein, P.L. (1996) *Against the Gods: The Remarkable Story of Risk*. New York: John Wiley & Sons.

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1**

### **Κίνδυνος Αγοράς, Μόχλευση και η Ανάγκη Ποσοτικής Μέτρησης**

#### 1.1 Εισαγωγή

Η αυξανόμενη πολυπλοκότητα των σύγχρονων χρηματοπιστωτικών αγορών, σε συνδυασμό με την εκτεταμένη χρήση παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων και μηχανισμών μόχλευσης, έχει αναδείξει τη συστηματική μέτρηση και διαχείριση του κινδύνου ως θεμελιώδες στοιχείο της σύγχρονης χρηματοοικονομικής πρακτικής. Η εμπειρία διαδοχικών χρηματοπιστωτικών και μακροοικονομικών διαταραχών — από την παγκόσμια χρηματοπιστωτική κρίση του 2008 έως την πανδημία COVID-19 και τις πρόσφατες πληθωριστικές και γεωπολιτικές αναταράξεις — υπογραμμίζει ότι οι αγορές χαρακτηρίζονται από μη γραμμικές δυναμικές και απότομες μεταβολές της μεταβλητότητας, οι οποίες δυσχεραίνουν την αξιόπιστη αποτίμηση του κινδύνου (McNeil et al., 2015).

Στο πλαίσιο αυτό, η ανάγκη ανάπτυξης ποσοτικών και επιχειρησιακά εφαρμόσιμων δεικτών κινδύνου οδήγησε στην ευρεία υιοθέτηση του Value-at-Risk (VaR), τόσο από χρηματοπιστωτικά ιδρύματα όσο και από εποπτικές αρχές. Παρά τις τεκμηριωμένες θεωρητικές και εμπειρικές αδυναμίες του, το VaR εξακολουθεί να αποτελεί βασικό εργαλείο αξιολόγησης κινδύνου αγοράς, ιδίως όταν συνδυάζεται με κατάλληλες μεθοδολογίες εκτίμησης της κατανομής αποδόσεων και διαδικασίες ελέγχου αξιοπιστίας μέσω backtesting (Jorion, 2007).

Η παρούσα διπλωματική εργασία εντάσσεται στο παραπάνω ερευνητικό πλαίσιο και εστιάζει στη συγκριτική αξιολόγηση εναλλακτικών μεθόδων εκτίμησης του VaR υπό συνθήκες αυξημένης μόχλευσης και μεταβαλλόμενων καθεστώτων αγοράς. Η εμπειρική ανάλυση βασίζεται στον χρηματιστηριακό δείκτη S&P 500, ο οποίος χρησιμοποιείται ευρέως ως αντιπροσωπευτικός δείκτης της συνολικής συμπεριφοράς της αγοράς μετοχών. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην απόδοση των υποδειγμάτων σε περιόδους έντονης χρηματοπιστωτικής αστάθειας, όπου η υποεκτίμηση του κινδύνου μπορεί να επηρεάσει αρνητικά τη φερεγγυότητα και την κεφαλαιακή επάρκεια των επενδυτικών οργανισμών.

#### 1.2 Έννοια και Κατηγορίες Χρηματοοικονομικού Κινδύνου

Στη χρηματοοικονομική θεωρία, ο κίνδυνος (risk) ορίζεται ως η πιθανότητα απόκλισης των πραγματικών αποτελεσμάτων από τις αναμενόμενες εκβάσεις, όταν οι πιθανότητες των εναλλακτικών σεναρίων είναι, τουλάχιστον εν μέρει, γνωστές ή μπορούν να εκτιμηθούν με στατιστικές μεθόδους. Η κλασική διάκριση μεταξύ κινδύνου και αβεβαιότητας (uncertainty), όπως διατυπώθηκε από τον Knight (1921), παραμένει θεμελιώδης, καθώς η πρώτη αναφέρεται σε καταστάσεις όπου οι πιθανότητες μπορούν να ποσοτικοποιηθούν, ενώ η δεύτερη αφορά περιβάλλοντα όπου η πιθανότητα εμφάνισης μελλοντικών γεγονότων δεν μπορεί να προσδιοριστεί με αξιοπιστία.

Στο πλαίσιο της λειτουργίας των χρηματοπιστωτικών αγορών, οι βασικές κατηγορίες χρηματοοικονομικού κινδύνου περιλαμβάνουν τον πιστωτικό κίνδυνο (credit risk), τον κίνδυνο ρευστότητας (liquidity risk), τον λειτουργικό κίνδυνο (operational risk) και τον κίνδυνο αγοράς (market risk). Ο πιστωτικός κίνδυνος σχετίζεται με την πιθανότητα αθέτησης συμβατικών υποχρεώσεων από αντισυμβαλλόμενους, ενώ ο κίνδυνος ρευστότητας αφορά την αδυναμία έγκαιρης εκκαθάρισης θέσεων χωρίς σημαντική επίδραση στις τιμές των περιουσιακών στοιχείων. Παράλληλα, ο λειτουργικός κίνδυνος προκύπτει από ανεπαρκείς εσωτερικές διαδικασίες, τεχνικές δυσλειτουργίες ή ανθρώπινα σφάλματα (Hull, 2018).

Μεταξύ των ανωτέρω κατηγοριών, ο κίνδυνος αγοράς κατέχει ιδιαίτερη σημασία, καθώς απορρέει από τις διακυμάνσεις των τιμών των χρηματοοικονομικών μέσων και επηρεάζει άμεσα την αποτίμηση επενδυτικών χαρτοφυλακίων. Ο κίνδυνος αυτός συνδέεται με μεταβολές σε βασικούς παράγοντες της αγοράς, όπως οι τιμές μετοχών, τα επιτόκια, οι συναλλαγματικές ισοτιμίες και οι τιμές εμπορευμάτων. Επιπλέον, σε περιόδους χρηματοπιστωτικής έντασης, οι συσχετίσεις μεταξύ διαφορετικών κατηγοριών περιουσιακών στοιχείων τείνουν να αυξάνονται, περιορίζοντας την αποτελεσματικότητα της διαφοροποίησης και καθιστώντας αναγκαία την ολιστική αποτίμηση του κινδύνου σε επίπεδο χαρτοφυλακίου (McNeil et al., 2015).

### 1.3 Κίνδυνος Αγοράς και Χρηματιστηριακοί Δείκτες

Η ανάλυση του κινδύνου αγοράς προϋποθέτει τη διάκριση μεταξύ συστηματικού και μη συστηματικού κινδύνου. Ο συστηματικός κίνδυνος αντανακλά τις διακυμάνσεις που επηρεάζουν το σύνολο της αγοράς και συνδέεται με μακροοικονομικούς παράγοντες, όπως οι μεταβολές των επιτοκίων, ο πληθωρισμός και η οικονομική ανάπτυξη. Αντίθετα, ο μη συστηματικός κίνδυνος σχετίζεται με ιδιοσυγκρασιακά χαρακτηριστικά μεμονωμένων επιχειρήσεων ή κλάδων και μπορεί να μειωθεί μέσω διαφοροποίησης χαρτοφυλακίου (Elton et al., 2014).

Στην εμπειρική ανάλυση του συστηματικού κινδύνου, οι ευρείς χρηματιστηριακοί δείκτες χρησιμοποιούνται συχνά ως αντιπροσωπευτικοί δείκτες της συνολικής συμπεριφοράς της αγοράς. Ο δείκτης S&P 500 αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα, καθώς περιλαμβάνει μεγάλο αριθμό εταιρειών υψηλής κεφαλαιοποίησης και θεωρείται αξιόπιστος δείκτης της δυναμικής της αμερικανικής αγοράς μετοχών. Η χρήση τέτοιων δεικτών ως βάση για την ποσοτική αποτίμηση κινδύνου επιτρέπει την απομόνωση των συστηματικών διακυμάνσεων και περιορίζει τη στρέβλωση που ενδέχεται να προκύψει από εταιρικά ή κλαδικά γεγονότα.

Επιπλέον, η ανάλυση σε επίπεδο δείκτη καθιστά τα εμπειρικά αποτελέσματα περισσότερο γενικεύσιμα και συμβατά με τις πρακτικές διαχείρισης κινδύνου που εφαρμόζονται από θεσμικούς επενδυτές, επενδυτικές τράπεζες και οργανισμούς διαχείρισης κεφαλαίων, οι οποίοι συχνά εκτίθενται κυρίως σε συστηματικούς παράγοντες κινδύνου.

## 1.4 Μόχλευση και Ενίσχυση του Κινδύνου

Η χρηματοοικονομική μόχλευση αναφέρεται στη χρήση δανειακών κεφαλαίων ή παραγώγων χρηματοοικονομικών μέσων με στόχο την αύξηση της επενδυτικής έκθεσης πέραν των διαθέσιμων ιδίων κεφαλαίων. Παρότι η μόχλευση μπορεί να ενισχύσει τις αποδόσεις σε περιόδους ευνοϊκών συνθηκών αγοράς, συνεπάγεται ταυτόχρονα δυσανάλογη αύξηση των ζημιών όταν οι τιμές κινούνται αντίθετα προς τις επενδυτικές θέσεις.

Από τη σκοπιά της διαχείρισης κινδύνου, η μόχλευση λειτουργεί ως μηχανισμός ενίσχυσης της αριστερής ουράς της κατανομής αποδόσεων, αυξάνοντας την πιθανότητα εμφάνισης ακραίων αρνητικών αποτελεσμάτων. Ακόμη και μικρές μεταβολές στις τιμές των υποκείμενων περιουσιακών στοιχείων μπορούν να οδηγήσουν σε σημαντικές ποσοστιαίες απώλειες επί των ιδίων κεφαλαίων, γεγονός που ενισχύει τον κίνδυνο χρηματοοικονομικής δυσχέρειας.

Η διεθνής εμπειρία καταδεικνύει ότι σε περιόδους χρηματοπιστωτικών κρίσεων η υπερβολική χρήση μόχλευσης συνδέεται συχνά με αναγκαστικές ρευστοποιήσεις θέσεων, margin calls και επιτάχυνση των καθοδικών κινήσεων της αγοράς. Για τον λόγο αυτό, η αξιολόγηση του κινδύνου χωρίς ρητή ενσωμάτωση της μόχλευσης ενδέχεται να οδηγήσει σε σημαντική υποεκτίμηση της πραγματικής έκθεσης των επενδυτών σε ακραία γεγονότα (Adrian and Shin, 2010).

## 1.5 Η Ανάγκη για Συνοπτικά Μέτρα Κινδύνου

Η πλήρης περιγραφή της κατανομής αποδόσεων ενός χαρτοφυλακίου παρέχει θεωρητικά την πληρέστερη απεικόνιση του επενδυτικού κινδύνου. Στην πράξη, ωστόσο, η πολυπλοκότητα των χρηματοπιστωτικών δεδομένων, η ανάγκη ταχείας λήψης αποφάσεων και οι επιχειρησιακοί περιορισμοί καθιστούν αναγκαία τη χρήση συνοπτικών μέτρων κινδύνου που επιτρέπουν την αποτελεσματική παρακολούθηση και επικοινωνία της έκθεσης σε κινδύνους.

Στο πλαίσιο αυτό, τα μέτρα κινδύνου που βασίζονται σε ποσοστημόρια της κατανομής αποδόσεων (quantile-based risk measures) έχουν αποκτήσει ιδιαίτερη σημασία. Το Value-at-Risk αποτελεί το πλέον διαδεδομένο από αυτά, καθώς συνοψίζει τον κίνδυνο μιας επενδυτικής θέσης σε μία αριθμητική εκτίμηση, η οποία εκφράζει τη μέγιστη αναμενόμενη ζημία για συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα και επίπεδο εμπιστοσύνης, υπό κανονικές συνθήκες αγοράς.

Παρά τις αδυναμίες του, όπως η αδυναμία παροχής πληροφόρησης σχετικά με τη σοβαρότητα ζημιών πέραν του ορίου του VaR, το μέτρο αυτό έχει καθιερωθεί ως κοινή γλώσσα επικοινωνίας κινδύνου μεταξύ διαχειριστών κινδύνου, ανώτατης διοίκησης και εποπτικών αρχών, γεγονός που εξηγεί τη διαχρονική του σημασία στη ρυθμιστική πρακτική (Basel Committee, 2019).

## 1.6 Σκοπός και Ερευνητικά Ερωτήματα της Εργασίας

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η συγκριτική αξιολόγηση εναλλακτικών μεθόδων εκτίμησης του Value-at-Risk σε περιβάλλον αυξημένης μόχλευσης και διαφοροποιημένων καθεστώτων αγοράς. Ειδικότερα, η εργασία επιδιώκει να διερευνήσει τα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

- Πώς συγκρίνεται η απόδοση παραμετρικών και μη παραμετρικών μεθόδων εκτίμησης VaR σε μοχλευμένο χαρτοφυλάκιο που βασίζεται σε ευρύ χρηματιστηριακό δείκτη;
- Σε ποιο βαθμό διαφοροποιείται η αποτελεσματικότητα των υποδειγμάτων μεταξύ κανονικών και περιόδων χρηματοπιστωτικής πίεσης;
- Σε ποιο βαθμό το Variance–Covariance VaR υποεκτιμά τον κίνδυνο σε περιόδους κρίσης σε σύγκριση με τις προσεγγίσεις Historical Simulation και Filtered Historical Simulation;

Η απάντηση στα παραπάνω ερωτήματα αναμένεται να συμβάλει τόσο στη θεωρητική κατανόηση της συμπεριφοράς των μεθόδων VaR όσο και στη βελτίωση της πρακτικής διαχείρισης κινδύνου σε περιβάλλοντα αυξημένης χρηματοπιστωτικής αστάθειας.

## 1.7 Σύνοψη Κεφαλαίου

Το παρόν κεφάλαιο παρουσίασε το εννοιολογικό πλαίσιο της εργασίας, αναλύοντας τη φύση του κινδύνου αγοράς, τη σημασία της χρηματοοικονομικής μόχλευσης και την ανάγκη χρήσης ποσοτικών μέτρων αποτίμησης κινδύνου. Η ανάλυση κατέδειξε τον κεντρικό ρόλο του Value-at-Risk στη σύγχρονη διαχείριση κινδύνου και διαμόρφωσε τη θεωρητική βάση για την παρουσίαση των μεθόδων εκτίμησης και των διαδικασιών αξιολόγησης του VaR που εξετάζονται στο επόμενο κεφάλαιο.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### Θεωρητικό και Κανονιστικό Πλαίσιο του Value-at-Risk (VaR): Μέθοδοι Εκτίμησης, Backtesting και Κριτική

#### 2.1 Ορισμός και Εννοιολογικό Πλαίσιο του Value-at-Risk

Το Value-at-Risk (VaR) αποτελεί ένα από τα πλέον διαδεδομένα μέτρα ποσοτικής αποτίμησης του κινδύνου στη σύγχρονη χρηματοοικονομική θεωρία και πρακτική. Η βασική του λειτουργία συνίσταται στη σύνοψη της έκθεσης ενός χαρτοφυλακίου σε κίνδυνο μέσω ενός ενιαίου αριθμητικού μεγέθους, το οποίο εκφράζει τη μέγιστη αναμενόμενη ζημία που ενδέχεται να προκύψει εντός συγκεκριμένου χρονικού ορίζοντα, για προκαθορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης και υπό συνθήκες ομαλής λειτουργίας της αγοράς (Jorion, 2007).

Σε τυπική μαθηματική διατύπωση, το VaR ορίζεται ως το  $\alpha$ -ποσοστημόριο της υπό όρους κατανομής των ζημιών ενός χαρτοφυλακίου. Αν  $L_t$  συμβολίζει τη ζημία κατά την επόμενη χρονική περίοδο και  $F_t$  το σύνολο των διαθέσιμων πληροφοριών στη χρονική στιγμή  $t$ , τότε το VaR σε επίπεδο εμπιστοσύνης  $\alpha$  μπορεί να οριστεί ως:

$$(1) VaR_{\alpha,t} = \inf\{x \in R: P(L_{t+1} \leq x | F_t) \geq \alpha\}$$

Ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος από τη μεθοδολογία εκτίμησης της κατανομής των ζημιών. Συνεπώς, το VaR δεν αποτελεί αυτόνομο μοντέλο, αλλά στατιστικό μέτρο κινδύνου, του οποίου η εκτίμηση εξαρτάται άμεσα από τις υποθέσεις και τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση των αποδόσεων.

Η ευρεία διάδοση του VaR οφείλεται κυρίως στην απλότητα της ερμηνείας του και στη δυνατότητα χρήσης του ως εργαλείου επικοινωνίας μεταξύ διαχειριστών κινδύνου, διοικητικών στελεχών και εποπτικών αρχών. Παράλληλα, η συμπύκνωση της πληροφορίας σε έναν αριθμό συνεπάγεται αναπόφευκτα απώλεια πληροφόρησης σχετικά με τη μορφή των ακραίων ζημιών πέραν του επιλεγμένου ποσοστημορίου, γεγονός που έχει αποτελέσει αντικείμενο εκτενούς κριτικής στη βιβλιογραφία (McNeil et al., 2015).

#### 2.2 Ιστορική Εξέλιξη και Κανονιστικό Πλαίσιο

Η συστηματική εφαρμογή του VaR άρχισε να εδραιώνεται στις αρχές της δεκαετίας του 1990, όταν μεγάλοι χρηματοπιστωτικοί οργανισμοί επιδίωξαν την ανάπτυξη ενοποιημένων συστημάτων μέτρησης κινδύνου σε επίπεδο ομίλου. Καθοριστική υπήρξε η συμβολή της πρωτοβουλίας RiskMetrics της J.P. Morgan, η οποία εισήγαγε ένα τυποποιημένο πλαίσιο εκτίμησης του κινδύνου αγοράς βασισμένο στη μεθοδολογία Variance–Covariance και στη χρήση εκθετικά σταθμισμένων κινητών μέσων (EWMA) για τη δυναμική εκτίμηση της μεταβλητότητας (RiskMetrics Group, 1996).

Η επιτυχία της προσέγγισης αυτής συνέβαλε ουσιαστικά στην κανονιστική ενσωμάτωση του VaR. Στο πλαίσιο των Συμφωνιών της Βασιλείας, και ιδίως μετά την εισαγωγή της

προσέγγισης Internal Models Approach, το VaR καθιερώθηκε ως βασικό εργαλείο υπολογισμού κεφαλαιακών απαιτήσεων έναντι του κινδύνου αγοράς (Basel Committee, 2006).

Η παγκόσμια χρηματοπιστωτική κρίση του 2008, ωστόσο, ανέδειξε σημαντικούς περιορισμούς των VaR μοντέλων, καθώς αρκετές εφαρμογές απέτυχαν να αποτυπώσουν επαρκώς την ένταση των ακραίων ζημιών. Η εξέλιξη αυτή οδήγησε σε ενίσχυση της κανονιστικής έμφασης σε εναλλακτικά μέτρα κινδύνου, όπως το Expected Shortfall, χωρίς ωστόσο να μειωθεί η πρακτική σημασία του VaR ως εργαλείου αναφοράς και συγκριτικής αξιολόγησης μοντέλων κινδύνου.

### 2.3 Ταξινόμηση Μεθόδων Εκτίμησης του VaR

Η εκτίμηση του VaR προϋποθέτει τη μοντελοποίηση της υπό όρους κατανομής των αποδόσεων ενός χαρτοφυλακίου. Στη διεθνή βιβλιογραφία έχουν αναπτυχθεί πολυάριθμες μεθοδολογικές προσεγγίσεις, οι οποίες συνήθως ταξινομούνται σε τρεις βασικές κατηγορίες: παραμετρικές, μη παραμετρικές και ημι-παραμετρικές.

Οι παραμετρικές μέθοδοι βασίζονται σε ρητές υποθέσεις σχετικά με τη μορφή της κατανομής των αποδόσεων και συνοψίζουν τον κίνδυνο μέσω περιορισμένου αριθμού παραμέτρων, συνήθως του μέσου και της διακύμανσης. Αντίθετα, οι μη παραμετρικές προσεγγίσεις, όπως το Historical Simulation, αποφεύγουν συγκεκριμένες κατανομικές υποθέσεις και στηρίζονται άμεσα στην εμπειρική κατανομή των ιστορικών δεδομένων.

Οι ημι-παραμετρικές προσεγγίσεις επιχειρούν να συνδυάσουν τα πλεονεκτήματα των δύο προηγούμενων κατηγοριών, επιτρέποντας τη μοντελοποίηση της χρονικά μεταβαλλόμενης μεταβλητότητας, ενώ διατηρούν μη παραμετρική αντιμετώπιση των τυχαίων διαταραχών. Η παρούσα εργασία εστιάζει στη συγκριτική αξιολόγηση των τριών αυτών κατηγοριών, αξιοποιώντας κοινό εμπειρικό πλαίσιο ανάλυσης.

**Πίνακας 2.1**

Μέθοδος	Κατηγορία	Βασική Υπόθεση	Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
Parametric (V/C)	Παραμετρική	Normality	Απλότητα	Underestimation tails
HS	Μη-παραμετρική	Stationarity	Captures heavy tails	Slow regime adaptation
FHS-EWMA	Ημι-παραμετρική	Volatility dynamics	Reduced clustering	Quantile miscalibration

## 2.4 Parametric (Variance–Covariance) Value-at-Risk

Η προσέγγιση Variance–Covariance, γνωστή και ως Delta-Normal VaR, αποτελεί την ιστορικά πρώτη συστηματική παραμετρική μέθοδο εκτίμησης του VaR. Η μέθοδος βασίζεται στην υπόθεση ότι οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου ακολουθούν κανονική κατανομή ή ότι η κατανομή των ζημιών μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά μέσω των δύο πρώτων ροπών της κατανομής.

Υπό την υπόθεση αυτή, το VaR υπολογίζεται σε κλειστή μορφή ως συνάρτηση του μέσου και της τυπικής απόκλισης των αποδόσεων, γεγονός που προσδίδει στη μέθοδο σημαντικά πλεονεκτήματα υπολογιστικής απλότητας και διαφάνειας. Ωστόσο, πλήθος εμπειρικών μελετών έχει καταδείξει ότι οι χρηματοοικονομικές αποδόσεις παρουσιάζουν ασυμμετρία, υπερβάλλουσα κύρτωση και έντονο volatility clustering, χαρακτηριστικά που δεν συμβαδίζουν με την υπόθεση κανονικότητας (Hull, 2018).

Ως αποτέλεσμα, το Parametric VaR τείνει να υποεκτιμά την πιθανότητα εμφάνισης ακραίων ζημιών, ιδίως σε περιόδους χρηματοπιστωτικής αστάθειας. Παρά τους περιορισμούς αυτούς, η μέθοδος εξακολουθεί να χρησιμοποιείται ευρέως ως σημείο αναφοράς για την αξιολόγηση πιο σύνθετων μοντέλων κινδύνου.

## 2.5 Historical Simulation Value-at-Risk

Η μέθοδος Historical Simulation αποτελεί μία από τις πλέον διαδεδομένες μη παραμετρικές τεχνικές εκτίμησης του VaR. Η βασική της φιλοσοφία στηρίζεται στην υπόθεση ότι η πρόσφατη ιστορική συμπεριφορά των αποδόσεων παρέχει επαρκή πληροφόρηση για τον μελλοντικό κίνδυνο.

Η διαδικασία εκτίμησης περιλαμβάνει την επιλογή ενός κινούμενου παραθύρου ιστορικών δεδομένων, την ταξινόμηση των αντίστοιχων ζημιών και τον προσδιορισμό του ποσοστημορίου που αντιστοιχεί στο επιλεγμένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Με τον τρόπο αυτό, το VaR εκτιμάται ως εμπειρικό quantile, χωρίς την ανάγκη επιβολής θεωρητικών κατανομικών υποθέσεων.

Η HS έχει το πλεονέκτημα ότι ενσωματώνει φυσικά χαρακτηριστικά των δεδομένων, όπως ασυμμετρία και βαριές ουρές. Ωστόσο, προϋποθέτει στασιμότητα της κατανομής αποδόσεων εντός του επιλεγμένου παραθύρου και παρουσιάζει περιορισμένη ικανότητα προσαρμογής σε απότομες αλλαγές καθεστώτος κινδύνου. Επιπλέον, η μέθοδος αδυνατεί να αποτυπώσει ακραία γεγονότα που δεν περιλαμβάνονται στο ιστορικό δείγμα (Pritsker, 2006).

## 2.6 Filtered Historical Simulation Value-at-Risk

Το Filtered Historical Simulation αναπτύχθηκε ως επέκταση της απλής ιστορικής προσομοίωσης, με στόχο την αντιμετώπιση της χρονικά μεταβαλλόμενης μεταβλητότητας των χρηματοοικονομικών αποδόσεων. Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι ο διαχωρισμός της δυναμικής της μεταβλητότητας από τη μορφή της κατανομής των τυχαίων διαταραχών.

Αρχικά, οι αποδόσεις φιλτράρονται μέσω ενός μοντέλου μεταβλητότητας ώστε να εξαχθούν τυποποιημένα κατάλοιπα, τα οποία προσεγγίζουν τη συμπεριφορά ανεξάρτητων και ταυτόσημα κατανεμημένων μεταβλητών. Στη συνέχεια, τα κατάλοιπα επαναδειγματοληπτούνται μη παραμετρικά και επανακλιμακώνονται με βάση την εκτιμώμενη υπό όρους μεταβλητότητα, παράγοντας την κατανομή των μελλοντικών αποδόσεων.

Η προσέγγιση αυτή επιτρέπει την καλύτερη αποτύπωση του volatility clustering και βελτιώνει την προσαρμοστικότητα του VaR σε περιόδους αυξημένης μεταβλητότητας. Στην παρούσα εργασία, το FHS υλοποιείται με χρήση EWMA μοντέλου μεταβλητότητας, επιλογή που διασφαλίζει υπολογιστική αποτελεσματικότητα και συμβατότητα με τη μεθοδολογική φιλοσοφία του RiskMetrics.

## 2.7 Value-at-Risk και Καθεστώτα Αγοράς

Η απόδοση των μοντέλων VaR επηρεάζεται σημαντικά από το καθεστώς λειτουργίας της αγοράς. Τα χρηματοοικονομικά δεδομένα χαρακτηρίζονται συχνά από εναλλαγές μεταξύ περιόδων χαμηλής και υψηλής μεταβλητότητας, οι οποίες συνδέονται με μακροοικονομικές διαταραχές και χρηματοπιστωτικές κρίσεις.

Σε περιόδους σχετικής σταθερότητας, οι περισσότερες μέθοδοι VaR παρουσιάζουν ικανοποιητική προβλεπτική ικανότητα. Αντίθετα, κατά τη διάρκεια κρίσεων, η αύξηση της μεταβλητότητας και των συσχετίσεων μεταξύ περιουσιακών στοιχείων οδηγεί συχνά σε συστηματικές υπερβάσεις του VaR. Η εξέταση της συμπεριφοράς των μοντέλων υπό διαφορετικά καθεστώτα αγοράς είναι ιδιαίτερα κρίσιμη σε περιβάλλοντα μόχλευσης, όπου οι ζημίες μπορούν να ενισχυθούν σημαντικά.

## 2.8 Backtesting του Value-at-Risk

Η πρακτική αξιολόγηση των μοντέλων VaR απαιτεί συστηματικό backtesting, δηλαδή σύγκριση των προβλέψεων κινδύνου με τις πραγματοποιηθείσες ζημίες. Ένα ορθά προδιαγεγραμμένο μοντέλο VaR πρέπει να ικανοποιεί δύο βασικές ιδιότητες: την άνευ όρων κάλυψη και την ανεξαρτησία των υπερβάσεων.

Η πρώτη ιδιότητα εξετάζει κατά πόσο η συχνότητα εμφάνισης υπερβάσεων συμφωνεί με το επιλεγμένο επίπεδο εμπιστοσύνης, ενώ η δεύτερη αξιολογεί αν οι υπερβάσεις

εμφανίζονται τυχαία στον χρόνο. Οι έλεγχοι Kupiec (1995) και Christoffersen (1998) αποτελούν καθιερωμένα εργαλεία για την εμπειρική αξιολόγηση των παραπάνω ιδιοτήτων και χρησιμοποιούνται εκτενώς τόσο στην ακαδημαϊκή έρευνα όσο και στη ρυθμιστική πρακτική.

## 2.9 Κριτική του VaR και Εναλλακτικά Μέτρα Κινδύνου

Παρά τη δημοτικότητά του, το VaR έχει δεχθεί σημαντική κριτική, κυρίως λόγω της αδυναμίας του να αποτυπώσει τη σοβαρότητα ζημιών πέραν του επιλεγμένου ποσοστημορίου. Ως εναλλακτική προσέγγιση, έχει προταθεί το Expected Shortfall, το οποίο υπολογίζει τον μέσο όρο των ζημιών υπό την προϋπόθεση ότι αυτές υπερβαίνουν το VaR.

Το Expected Shortfall θεωρείται συνεκτικό μέτρο κινδύνου και έχει υιοθετηθεί σταδιακά από το κανονιστικό πλαίσιο της Βασιλείας. Παρά τα πλεονεκτήματά του, η εκτίμησή του συνεπάγεται αυξημένες υπολογιστικές απαιτήσεις και μεγαλύτερη ευαισθησία στις κατανομικές υποθέσεις, γεγονός που εξηγεί τη διατήρηση του VaR ως βασικού σημείου αναφοράς στη βιβλιογραφία και στη χρηματοπιστωτική πρακτική.

## 2.10 Σύνοψη Κεφαλαίου

Το κεφάλαιο ανέπτυξε το θεωρητικό και κανονιστικό πλαίσιο του Value-at-Risk, παρουσιάζοντας τις κύριες μεθόδους εκτίμησης, τα πλεονεκτήματα και τους περιορισμούς τους, καθώς και τη σημασία του backtesting και της ανάλυσης καθεστώτων αγοράς. Η ανάλυση κατέδειξε ότι η αποτελεσματικότητα των μοντέλων VaR εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό από τις συνθήκες της αγοράς και τη μεθοδολογία εκτίμησης.

Το επόμενο κεφάλαιο εφαρμόζει το θεωρητικό αυτό πλαίσιο σε εμπειρικά δεδομένα του δείκτη S&P 500, αξιολογώντας συγκριτικά τις μεθόδους Parametric, Historical Simulation και Filtered Historical Simulation υπό διαφορετικά καθεστάτα αγοράς.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### Μεθοδολογία και Ερευνητικός Σχεδιασμός

#### 3.1 Περιγραφή Δεδομένων, Πλαίσιο Ανάλυσης και Στατιστικά Χαρακτηριστικά

Η εμπειρική ανάλυση της παρούσας διπλωματικής εργασίας βασίζεται σε ημερήσια δεδομένα του χρηματιστηριακού δείκτη S&P 500, ο οποίος αποτελεί έναν από τους πλέον ευρέως χρησιμοποιούμενους δείκτες αναφοράς (benchmarks) για την αγορά μετοχών των Ηνωμένων Πολιτειών και, κατ' επέκταση, για τον παγκόσμιο χρηματοοικονομικό κύκλο. Η χρήση ενός ευρέως χρηματιστηριακού δείκτη επιτρέπει τη μελέτη του συστηματικού κινδύνου αγοράς (systematic market risk), αποφεύγοντας στρεβλώσεις που θα μπορούσαν να προκύψουν από ιδιοσυγκρασιακά γεγονότα μεμονωμένων τίτλων.

Η ανάλυση υιοθετεί ρητά ένα μονομεταβλητό (univariate) πλαίσιο μέτρησης κινδύνου αγοράς, στο οποίο το αντικείμενο ενδιαφέροντος είναι η κατανομή των αποδόσεων ενός και μόνο υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου. Ως εκ τούτου, η παρούσα εργασία δεν αποσκοπεί στη μοντελοποίηση ενός πραγματικού πολυ-asset χαρτοφυλακίου, ούτε στην εξέταση της δυναμικής συσχετίσεων μεταξύ διαφορετικών τίτλων ή αγορών. Αντιθέτως, ο στόχος είναι η απομόνωση και ενδεδειγμένη μελέτη της συμπεριφοράς των μεθόδων Value-at-Risk (VaR) σε ένα ελεγχόμενο περιβάλλον, όπου η πολυπλοκότητα περιορίζεται σκόπιμα ώστε να αναδειχθούν καθαρά οι αδυναμίες και τα πλεονεκτήματα κάθε μεθοδολογικής προσέγγισης.

Το σύνολο δεδομένων περιλαμβάνει:

- ημερήσιες τιμές κλεισίματος του δείκτη S&P 500,
- για την περίοδο 4 Δεκεμβρίου 2015 έως 4 Δεκεμβρίου 2025,
- με συνολικά 2.514 παρατηρήσεις ημερήσιων αποδόσεων, μετά τον υπολογισμό των returns.

Έστω  $P_t$  το επίπεδο κλεισίματος του δείκτη στη χρονική στιγμή  $t$ . Οι ημερήσιες συνεχώς ανατοκιζόμενες (logarithmic) αποδόσεις ορίζονται ως:

$$(2) r_t = \ln \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right), \quad t = 2, \dots, T$$

Η επιλογή των log αποδόσεων εξασφαλίζει προσθετικότητα στον χρόνο και διευκολύνει τη στατιστική ανάλυση, ιδίως σε πλαίσια όπου εξετάζεται η συσσώρευση κινδύνου σε διαδοχικές περιόδους. Μια προκαταρκτική στατιστική διερεύνηση της κατανομής των αποδόσεων καταδεικνύει χαρακτηριστικά που είναι πλήρως συμβατά με τα γνωστά facts των χρηματοοικονομικών αγορών: ύπαρξη ήπιας θετικής μέσης απόδοσης, έντονη μεταβλητότητα, αρνητική ασυμμετρία και σημαντική υπερβάλλουσα κύρτωση. Τα χαρακτηριστικά αυτά υποδηλώνουν απόκλιση από την κανονικότητα και ενισχύουν τη

σημασία της χρήσης μεθόδων VaR που δεν βασίζονται αποκλειστικά σε απλουστευτικές παραμετρικές υποθέσεις.

### Πίνακας 3.1

#### Επισκόπηση συνόλου δεδομένων

Χαρακτηριστικό	Τιμή
Index	S&P 500
Περίοδος	04/12/2015 – 04/12/2025
Παρατηρήσεις	2.514
Leverage	$L = 5$
Crisis Periods	15/02/2020–30/04/2020 και 01/01/2022–31/10/2022

### 3.2 Κατασκευή Χαρτοφυλακίου και Πλαίσιο Μόχλευσης

Για τη διερεύνηση της απόδοσης των μεθόδων VaR σε περιβάλλον αυξημένου κινδύνου, η παρούσα εργασία εισάγει έναν σταθερό συντελεστή συνθετικής μόχλευσης, ο οποίος εφαρμόζεται απευθείας στη χρονοσειρά των ημερήσιων αποδόσεων του δείκτη.

Έστω  $L$  ο συντελεστής μόχλευσης. Στην εμπειρική ανάλυση τίθεται:

$$L = 5$$

Η μοχλευμένη ημερήσια απόδοση ορίζεται ως:

$$(3) r_t^{(L)} = L * r_t$$

όπου  $r_t$  είναι η ημερήσια απόδοση χωρίς μόχλευση.

και η αντίστοιχη ημερήσια ζημία ορίζεται ως:

$$(4) L_t = -r_t^{(L)}$$

ώστε θετικές τιμές της  $L_t$  να αντιστοιχούν σε οικονομικές απώλειες.

Η επιλογή της συνθετικής μόχλευσης γίνεται σκόπιμα και αναλυτικά, και όχι με σκοπό την προσομοίωση ενός συγκεκριμένου επενδυτικού προϊόντος. Η εργασία δεν ισχυρίζεται ότι αναπαριστά την πραγματική δυναμική μοχλευμένων παραγώγων, όπως futures ή options, ούτε λαμβάνει υπόψη κόστη χρηματοδότησης, απαιτήσεις περιθωρίου

(margin), spreads ή μη-γραμμικότητες αποτίμησης. Αντιθέτως, η μόχλευση χρησιμοποιείται ως εργαλείο κλιμάκωσης του κινδύνου, επιτρέποντας την ενίσχυση της αριστερής ουράς της κατανομής των ζημιών και, κατά συνέπεια, την αυστηρότερη δοκιμασία των μεθόδων VaR.

Από μεθοδολογική σκοπιά, η προσέγγιση αυτή επιτρέπει την καθαρή ανάλυση του τρόπου με τον οποίο οι διαφορετικές μέθοδοι VaR ανταποκρίνονται σε περιβάλλοντα αυξημένου tail risk, χωρίς την εισαγωγή πρόσθετου μοντελοποιητικού κινδύνου που θα συνεπαγόταν η αποτίμηση πολύπλοκων χρηματοοικονομικών προϊόντων. Με τον τρόπο αυτό, η μόχλευση λειτουργεί ως ελεγχόμενος μηχανισμός επιδείνωσης των συνθηκών κινδύνου, καθιστώντας εμφανέστερες τις αδυναμίες των μοντέλων σε περιόδους έντονης αστάθειας.

### 3.3 Πληροφοριακό Πλαίσιο, Ορισμός του Value-at-Risk και Χρονικός Ορίζοντας

Η εκτίμηση του Value-at-Risk βασίζεται πάντοτε στο πληροφοριακό σύνολο που είναι διαθέσιμο στον αναλυτή σε κάθε χρονική στιγμή. Έστω  $F_t$  η σ-άλγεβρα που περιλαμβάνει το σύνολο των πληροφοριών που είναι γνωστές έως και τη χρονική στιγμή  $t$ , συμπεριλαμβανομένων των παρελθουσών αποδόσεων και οποιωνδήποτε άλλων μεταβλητών χρησιμοποιούνται στη διαδικασία εκτίμησης.

Το μονοήμερο Value-at-Risk σε επίπεδο εμπιστοσύνης  $\alpha \in \{0.95, 0.99\}$  ορίζεται ως:

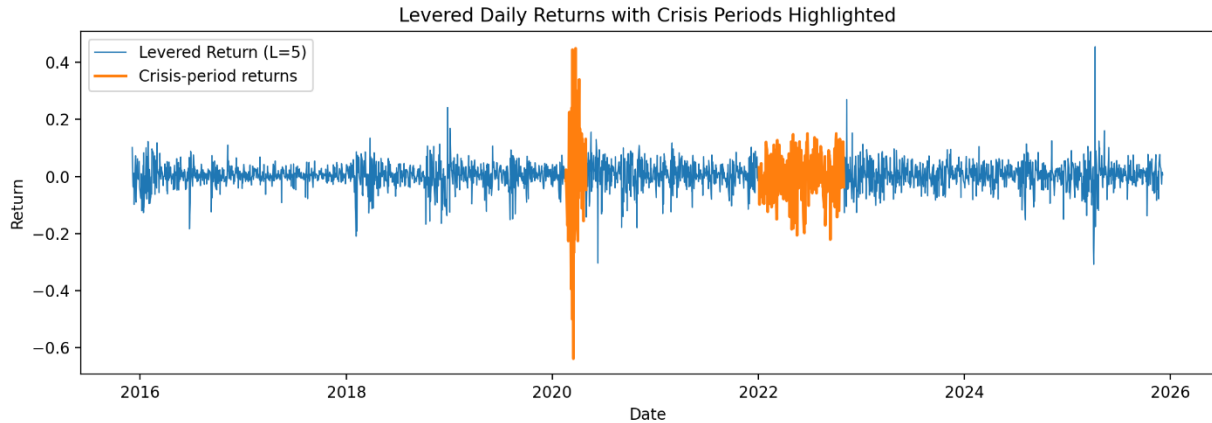
$$(5) VaR_{\alpha,t} = \inf\{x \in R: P(L_{t+1} \leq x | F_t) \geq \alpha\}$$

Ο ορισμός αυτός καθιστά σαφές ότι το VaR αποτελεί μέτρο κινδύνου και όχι μοντέλο. Η αριθμητική του τιμή εξαρτάται από τη μέθοδο που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της υπό όρους κατανομής των ζημιών και από τις υποθέσεις που υιοθετούνται σχετικά με τη δυναμική των αποδόσεων.

Η παρούσα εργασία περιορίζεται αυστηρά στον μονοήμερο χρονικό ορίζοντα πρόβλεψης (one-day-ahead VaR). Παρότι στη ρυθμιστική πρακτική (Basel III/IV) γίνεται συχνά χρήση μεγαλύτερων χρονικών οριζώντων (π.χ.  $h = 10$  ημέρες), η μετάβαση από τον μονοήμερο σε πολυήμερο VaR προϋποθέτει πρόσθετες υποθέσεις, όπως χρονική ανεξαρτησία των αποδόσεων και εφαρμογή κανόνων κλιμάκωσης τύπου  $\sqrt{h}$ . Δεδομένου ότι οι υποθέσεις αυτές είναι συχνά αμφισβητήσιμες σε περιόδους κρίσης, η εργασία επιλέγει σκόπιμα να επικεντρωθεί στον βραχυχρόνιο ορίζοντα, όπου η δυναμική της μεταβλητότητας και των καθεστώτων αγοράς μπορεί να μελετηθεί με μεγαλύτερη ακρίβεια.

### Γράφημα 3.3

Μοχλευμένες αποδόσεις με επισημασμένες περιόδους κρίσης



### 3.4 Μεθοδολογικό Πλαίσιο Εκτίμησης του Value-at-Risk

Η εκτίμηση του Value-at-Risk (VaR) στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας βασίζεται στην πρόβλεψη της υπό όρους κατανομής των μοχλευμένων ημερήσιων ζημιών  $L_{t+1}$ , δεδομένου του πληροφοριακού συνόλου  $F_t$ . Όπως αναλύθηκε στην Ενότητα 3.3, το VaR αποτελεί μέτρο κινδύνου και όχι μοντέλο, γεγονός που καθιστά κρίσιμη τη σαφή διάκριση μεταξύ του εννοιολογικού του ορισμού και των επιμέρους μεθοδολογιών εκτίμησής του.

Στην παρούσα εργασία εξετάζονται τρεις διακριτές προσεγγίσεις εκτίμησης του VaR, οι οποίες επιλέγονται λόγω της ευρείας χρήσης τους τόσο στην ακαδημαϊκή βιβλιογραφία όσο και στη ρυθμιστική και επαγγελματική πρακτική:

1. η μη παραμετρική μέθοδος Historical Simulation (HS),
2. η ημι-παραμετρική μέθοδος Filtered Historical Simulation (FHS) με φίλτρο μεταβλητότητας EWMA,
3. η παραμετρική μέθοδος Variance–Covariance (Parametric) VaR.

Και οι τρεις μέθοδοι στοχεύουν στην εκτίμηση του ίδιου αντικειμένου — του υπό όρους ποσοστημορίου της κατανομής των ζημιών — αλλά βασίζονται σε διαφορετικές υποθέσεις σχετικά με τη στατιστική φύση των αποδόσεων, τη δυναμική της μεταβλητότητας και τη μορφή των ουρών της κατανομής. Η συγκριτική τους αξιολόγηση επιτρέπει την απομόνωση του ρόλου των υποθέσεων αυτών στη συμπεριφορά του VaR υπό συνθήκες ενισχυμένου κινδύνου ουράς.

### 3.5 Historical Simulation Value-at-Risk

Η μέθοδος Historical Simulation (HS) αποτελεί μία από τις απλούστερες και πλέον διαδεδομένες μη παραμετρικές προσεγγίσεις εκτίμησης του Value-at-Risk. Ο πυρήνας της μεθοδολογίας έγκειται στην άμεση χρήση της εμπειρικής κατανομής των ιστορικών ζημιών, χωρίς την επιβολή συγκεκριμένης θεωρητικής κατανομής στις αποδόσεις. Με τον τρόπο αυτό, η HS αποφεύγει τις ισχυρές κατανομικές υποθέσεις που χαρακτηρίζουν τις παραμετρικές προσεγγίσεις και επιτρέπει, τουλάχιστον εκ των υστέρων, την ενσωμάτωση χαρακτηριστικών όπως ασυμμετρία και βαριές ουρές.

Η βασική παραδοχή της μεθόδου είναι ότι η πρόσφατη ιστορική κατανομή των ζημιών αποτελεί επαρκή και αντιπροσωπευτική προσέγγιση της μελλοντικής κατανομής κινδύνου, υπό την προϋπόθεση ότι το καθεστώς της αγοράς παραμένει αμετάβλητο. Η παραδοχή αυτή δεν είναι αθώα: ενσωματώνει έμμεσα την υπόθεση στασιμότητας (local stationarity) της κατανομής των αποδόσεων εντός του επιλεγμένου χρονικού παραθύρου, γεγονός που καθιστά τη μέθοδο ιδιαίτερα ευαίσθητη σε δομικές μεταβολές και μεταβάσεις καθεστώτων.

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, η HS χρησιμοποιείται ως βασικό σημείο αναφοράς (benchmark) μεταξύ των μη παραμετρικών προσεγγίσεων, επιτρέποντας τη σύγκρισή της τόσο με το παραμετρικό Variance–Covariance VaR όσο και με την ημι-παραμετρική προσέγγιση Filtered Historical Simulation.

#### 3.5.1 Rolling Window και Εμπειρική Κατανομή

Σε κάθε χρονική στιγμή  $t$ , η μέθοδος HS χρησιμοποιεί ένα κυλιόμενο παράθυρο  $N$  προηγούμενων παρατηρήσεων των μοχλευμένων ζημιών:

$$\{L_{t-N+1}, \dots, L_t\}$$

Στην παρούσα εργασία υιοθετείται παράθυρο μήκους:

$N = 250$  trading days (περίπου ένα έτος δεδομένων)

το οποίο αντιστοιχεί περίπου σε ένα έτος χρηματιστηριακών δεδομένων και είναι συνεπές τόσο με τη διεθνή βιβλιογραφία VaR όσο και με την καθιερωμένη τραπεζική πρακτική. Η επιλογή του μεγέθους του παραθύρου συνιστά κρίσιμη μεθοδολογική απόφαση, καθώς ενσωματώνει έναν σαφή συμβιβασμό μεταξύ στατιστικής ακρίβειας και προσαρμοστικότητας.

Συγκεκριμένα, ένα μεγαλύτερο παράθυρο αυξάνει τον αριθμό παρατηρήσεων στην ουρά της κατανομής και βελτιώνει τη στατιστική σταθερότητα των εκτιμήσεων, ιδίως σε υψηλά επίπεδα εμπιστοσύνης (π.χ. 99%). Ωστόσο, ταυτόχρονα καθιστά τη μέθοδο λιγότερο ευαίσθητη σε πρόσφατες μεταβολές της μεταβλητότητας και του καθεστώτος της αγοράς. Αντιθέτως, ένα μικρότερο παράθυρο επιτρέπει ταχύτερη προσαρμογή, αλλά

αυξάνει τον θόρυβο και τον κίνδυνο λανθασμένης βαθμονόμησης των ακραίων ποσοστημορίων.

Οι ζημίες εντός του παραθύρου ταξινομούνται σε αύξουσα σειρά, σχηματίζοντας την εμπειρική κατανομή των απωλειών:

$$(6) L_{(1),t} \leq L_{(2),t} \leq \dots \leq L_{(N),t}$$

Η κατανομή αυτή χρησιμοποιείται άμεσα για την εκτίμηση του VaR ως εμπειρικού ποσοστημορίου, χωρίς περαιτέρω μοντελοποίηση της δυναμικής των αποδόσεων.

Σημαντικό περιορισμό της προσέγγισης αποτελεί το γεγονός ότι η HS αποδίδει ίσο βάρος σε όλες τις παρατηρήσεις του παραθύρου, ανεξαρτήτως του χρόνου εμφάνισής τους. Κατά συνέπεια, η μέθοδος αδυνατεί να αποτυπώσει ρητά φαινόμενα χρονικά μεταβαλλόμενης μεταβλητότητας (volatility clustering), γεγονός που συχνά οδηγεί σε συστηματική υποεκτίμηση του κινδύνου κατά τη μετάβαση από ήπιες σε στρεσογόνες συνθήκες αγοράς. Ο περιορισμός αυτός αποκτά ιδιαίτερη σημασία σε περιβάλλοντα μόχλευσης, όπου οι διαδοχικές αρνητικές αποδόσεις μπορούν να οδηγήσουν σε ταχεία συσσώρευση ζημιών και αυξημένη πιθανότητα υπερβάσεων του VaR.

### 3.5.2 Εκτίμηση του VaR μέσω Εμπειρικών Ποσοστημορίων

Για ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης  $\alpha \in (0,1)$ , το Value-at-Risk στο πλαίσιο της μεθόδου Historical Simulation εκτιμάται ως το αντίστοιχο εμπειρικό ποσοστημόριο της κατανομής των ιστορικών ζημιών που περιλαμβάνονται στο κυλιόμενο παράθυρο. Συγκεκριμένα, εάν οι ζημίες

$$\{L_{t-N+1}, \dots, L_t\}$$

ταξινομηθούν σε αύξουσα σειρά ως:

$$L_{(1),t} \leq L_{(2),t} \leq \dots \leq L_{(N),t}$$

τότε η εκτίμηση του VaR στη χρονική στιγμή  $t$

$$\text{δίνεται από: } \widehat{VaR}_{\alpha,t}^{HS} = L_{\alpha N,t}$$

Η προσέγγιση αυτή είναι πλήρως μη παραμετρική και δεν απαιτεί εκτίμηση καμίας παραμέτρου, γεγονός που αποτελεί βασικό πλεονέκτημά της έναντι των παραμετρικών μεθόδων. Η εκτίμηση του VaR προκύπτει απευθείας από τα δεδομένα και, ως εκ τούτου, μπορεί να ενσωματώσει εμπειρικά χαρακτηριστικά των αποδόσεων, όπως ασυμμετρία, υπερβάλλουσα κύρτωση και βαριές ουρές, τα οποία είναι συστηματικά τεκμηριωμένα στη χρηματοοικονομική βιβλιογραφία.

Ωστόσο, η απλότητα της μεθόδου συνοδεύεται από σημαντικούς περιορισμούς. Πρώτον, η HS προϋποθέτει ότι η κατανομή των ζημιών είναι τοπικά στάσιμη εντός του επιλεγμένου παραθύρου  $N$ . Η υπόθεση αυτή συνεπάγεται ότι οι ιστορικές παρατηρήσεις αποτελούν αντιπροσωπευτικό δείγμα του άμεσου μέλλοντος, παραδοχή που συχνά

παραβιάζεται σε περιόδους έντονων μεταβολών της μεταβλητότητας ή κατά τη μετάβαση μεταξύ διαφορετικών καθεστώτων αγοράς.

Δεύτερον, η εκτίμηση του VaR μέσω εμπειρικών ποσοστημορίων είναι ιδιαίτερα ευαίσθητη στο μέγεθος του δείγματος, ιδίως σε υψηλά επίπεδα εμπιστοσύνης. Για παράδειγμα, με  $N=250$  παρατηρήσεις, το 99% ποσοστημόριο αντιστοιχεί πρακτικά σε 2–3 ακραίες παρατηρήσεις, γεγονός που αυξάνει τη στατιστική αβεβαιότητα και καθιστά την εκτίμηση του tail risk ευάλωτη σε μεμονωμένα επεισόδια. Το ζήτημα αυτό είναι ιδιαίτερα κρίσιμο σε περιβάλλοντα μόχλευσης, όπου η ενίσχυση των αποδόσεων μεταφράζεται σε δυσανάλογα μεγάλες ζημιές στις ουρές της κατανομής.

Τρίτον, η μέθοδος HS ανταποκρίνεται εγγενώς αργά σε απότομες αυξήσεις της μεταβλητότητας, καθώς αποδίδει ίσο βάρος σε όλες τις παρατηρήσεις του παραθύρου. Ως αποτέλεσμα, σε φάσεις μετάβασης από ήπιες σε στρεσογόνες συνθήκες αγοράς, το εκτιμώμενο VaR τείνει να υποεκτιμά τον πραγματικό κίνδυνο, οδηγώντας σε συστηματικές υπερβάσεις. Το φαινόμενο αυτό συνδέεται άμεσα με την εμφάνιση violation clustering στο backtesting, όπως τεκμηριώνεται εμπειρικά σε επόμενα κεφάλαια.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι η παρούσα εφαρμογή της HS περιορίζεται σκόπιμα σε μονοήμερο χρονικό ορίζοντα ( $h=1$ ), ώστε να διασφαλιστεί η συγκρισιμότητα μεταξύ των εξεταζόμενων μεθόδων και η καθαρή αξιολόγηση της επίδρασης της μόχλευσης στον βραχυχρόνιο κίνδυνο. Η επέκταση της HS σε μεγαλύτερους χρονικούς ορίζοντες απαιτεί πρόσθετες υποθέσεις σχετικά με τη χρονική συσσώρευση των ζημιών και την εξάρτηση των αποδόσεων, οι οποίες εξετάζονται κριτικά στη σχετική βιβλιογραφία αλλά δεν υιοθετούνται στο παρόν πλαίσιο, προκειμένου να αποφευχθεί εισαγωγή επιπλέον μοντελοποιητικού κινδύνου.

### 3.6 Filtered Historical Simulation (FHS) με φίλτρο EWMA

Το Filtered Historical Simulation (FHS) αναπτύχθηκε ως απάντηση στις θεμελιώδεις αδυναμίες της απλής Historical Simulation, και ιδίως στην αδυναμία της τελευταίας να προσαρμοστεί στη χρονικά μεταβαλλόμενη φύση της μεταβλητότητας των χρηματοοικονομικών αποδόσεων. Ενώ η HS χρησιμοποιεί άμεσα την εμπειρική κατανομή των ιστορικών ζημιών, το FHS εισάγει ένα ενδιάμεσο στάδιο φιλτραρίσματος, με στόχο τον διαχωρισμό της δυναμικής της μεταβλητότητας από τη στοχαστική δομή των καινοτομιών (innovations).

Η κεντρική ιδέα της προσέγγισης βασίζεται στην παρατήρηση ότι οι χρηματοοικονομικές αποδόσεις παρουσιάζουν έντονη χρονική εξάρτηση στη δεύτερη ροπή (volatility clustering), ενώ τα τυποποιημένα shocks εμφανίζουν συχνά πιο σταθερά κατανομικά χαρακτηριστικά. Υπό αυτή την οπτική, η απευθείας χρήση των ιστορικών ζημιών —

όπως στην HS— συγγέει δύο διαφορετικά φαινόμενα: (i) τις μεταβολές στην κλίμακα της κατανομής λόγω μεταβλητότητας και (ii) τη μορφή της ίδιας της κατανομής των shocks.

Το FHS επιχειρεί να αποσυνθέσει αυτά τα δύο στοιχεία. Συγκεκριμένα, οι αποδόσεις φιλτράρονται αρχικά μέσω ενός υποδείγματος υπό όρους μεταβλητότητας, ώστε να εξαχθούν τυποποιημένα υπολείμματα (standardised residuals) που είναι κατά προσέγγιση ανεξάρτητα και ταυτόσημα κατανομημένα. Στη συνέχεια, η εμπειρική κατανομή των residuals αυτών χρησιμοποιείται για την προσομοίωση μελλοντικών shocks, τα οποία επανακλιμακώνονται με βάση την τρέχουσα εκτίμηση της μεταβλητότητας. Με τον τρόπο αυτό, το VaR ανταποκρίνεται άμεσα στις πρόσφατες μεταβολές του κινδύνου, χωρίς να επιβάλλονται αυστηρές κατανομικές υποθέσεις.

Στην παρούσα εργασία, το φίλτρο μεταβλητότητας υλοποιείται μέσω ενός Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) σχήματος. Η επιλογή του EWMA είναι σκόπιμη και εξυπηρετεί δύο στόχους. Πρώτον, διασφαλίζει υπολογιστική απλότητα και διαφάνεια, στοιχεία κρίσιμα σε εφαρμογές διαχείρισης κινδύνου. Δεύτερον, ευθυγραμμίζεται με τη φιλοσοφία του RiskMetrics και τη διεθνή τραπεζική πρακτική, επιτρέποντας τη σύγκριση των αποτελεσμάτων με κανονιστικά αποδεκτές προσεγγίσεις.

Σε αντίθεση με πιο σύνθετα υποδείγματα τύπου GARCH, το EWMA δεν εισάγει πρόσθετες παραμέτρους που απαιτούν εκτίμηση και δεν προϋποθέτει συγκεκριμένη κατανομή για τις αποδόσεις. Ωστόσο, διατηρεί την ικανότητα να αποτυπώνει την υψηλή επιμονή της μεταβλητότητας, αποδίδοντας μεγαλύτερο βάρος στις πρόσφατες παρατηρήσεις. Το χαρακτηριστικό αυτό καθιστά το FHS–EWMA ιδιαίτερα κατάλληλο για την ανάλυση κινδύνου σε περιβάλλοντα με απότομες μεταβολές της αγοράς, όπου η απλή HS τείνει να υστερεί.

Από μεθοδολογική σκοπιά, το FHS μπορεί να θεωρηθεί ως ενδιάμεση προσέγγιση μεταξύ των καθαρά μη παραμετρικών μεθόδων και των πλήρως παραμετρικών υποδειγμάτων. Διατηρεί τη μη παραμετρική φύση της εκτίμησης των ουρών της κατανομής, ενώ ταυτόχρονα εισάγει υπό όρους δυναμική μέσω του volatility filtering. Το πλεονέκτημα αυτό είναι ιδιαίτερα κρίσιμο σε περιβάλλοντα μόχλευσης, όπου η χρονική συσσώρευση υψηλής μεταβλητότητας μπορεί να οδηγήσει σε διαδοχικές υπερβάσεις του VaR, ακόμη και όταν η συνολική συχνότητα των violations φαίνεται αποδεκτή.

Η θεωρητική αυτή κατασκευή υποδηλώνει ότι το FHS αναμένεται να βελτιώνει κυρίως τη χρονική δομή των υπερβάσεων (independence), χωρίς να εγγυάται κατ' ανάγκη άρτια βαθμονόμηση των ακραίων ποσοστημορίων. Η διάκριση αυτή είναι κρίσιμη για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων του backtesting που ακολουθεί και αποτελεί βασικό άξονα της εμπειρικής αξιολόγησης στο Κεφάλαιο 4.

### 3.6.1 Φιλτράρισμα Μεταβλητότητας μέσω EWMA

Η υπό όρους μεταβλητότητα εκτιμάται μέσω ενός σχήματος Exponentially Weighted Moving Average (EWMA):

$$(7) \sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda)(r_t^{(L)})^2$$

όπου  $\lambda \in (0,1)$  είναι η παράμετρος αποσύνθεσης. Για ημερήσια δεδομένα υιοθετείται η τιμή  $\lambda=0.94$ .

Η δομή του EWMA ενσωματώνει την υπόθεση ότι η μεταβλητότητα παρουσιάζει υψηλή χρονική επιμονή, αλλά δεν είναι σταθερή. Οι πρόσφατες αποδόσεις λαμβάνουν μεγαλύτερο βάρος στην εκτίμηση της τρέχουσας μεταβλητότητας, ενώ η επίδραση παλαιότερων παρατηρήσεων φθίνει εκθετικά. Η ιδιότητα αυτή καθιστά το EWMA ιδιαίτερα κατάλληλο για χρηματοοικονομικά δεδομένα, τα οποία χαρακτηρίζονται από έντονο volatility clustering, δηλαδή από περιόδους παρατεταμένης υψηλής ή χαμηλής μεταβλητότητας.

Στην παρούσα εργασία υιοθετείται η τιμή  $\lambda=0.94$  για ημερήσια δεδομένα, σε συμφωνία με τη φιλοσοφία του RiskMetrics και τη διεθνή τραπεζική πρακτική. Η επιλογή αυτή αντανακλά υψηλό βαθμό επιμονής της μεταβλητότητας και συνεπάγεται ότι περίπου το 94% της προηγούμενης εκτίμησης της διακύμανσης μεταφέρεται στη νέα περίοδο, ενώ το υπόλοιπο 6% αποδίδεται στη νέα πληροφορία. Η τιμή αυτή έχει αποδειχθεί εμπειρικά αποτελεσματική στην αποτύπωση της δυναμικής της μεταβλητότητας για ευρείς χρηματιστηριακούς δείκτες.

Από θεωρητική σκοπιά, το EWMA μπορεί να ερμηνευθεί ως ειδική περίπτωση υποδείγματος GARCH(1,1) χωρίς σταθερό όρο και με περιορισμούς στις παραμέτρους, γεγονός που εξασφαλίζει απλότητα και αποφυγή πρόσθετου μοντελοποιητικού κινδύνου. Σε αντίθεση με πλήρως παραμετρικά υποδείγματα, το EWMA δεν απαιτεί εκτίμηση παραμέτρων μέσω μέγιστης πιθανοφάνειας ούτε υιοθέτηση συγκεκριμένης κατανομής για τις αποδόσεις. Ως εκ τούτου, αποτελεί μια συντηρητική επιλογή που εξισορροπεί την ανάγκη δυναμικής προσαρμογής με την απαίτηση διαφάνειας και αναπαραγωγιμότητας.

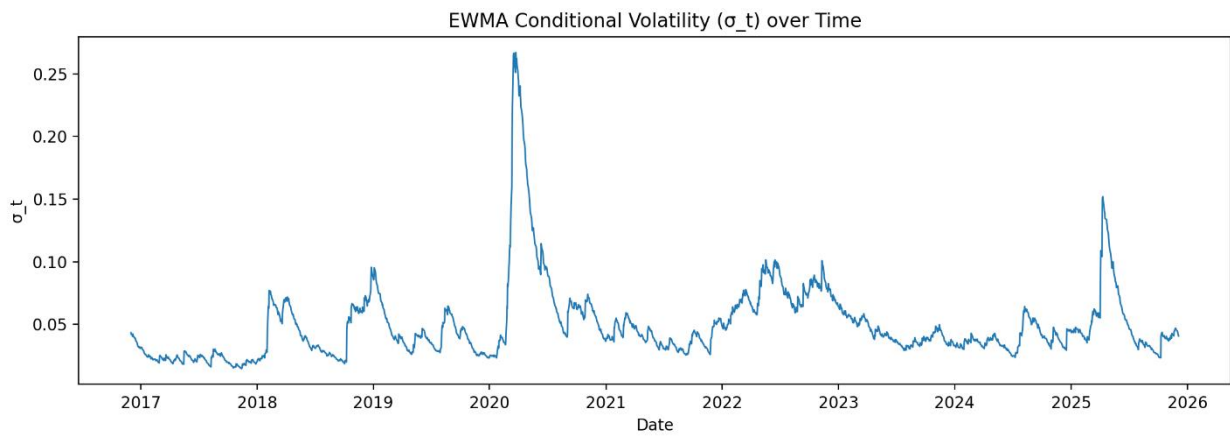
Η χρήση του EWMA στο πλαίσιο του Filtered Historical Simulation εξυπηρετεί έναν σαφή μεθοδολογικό σκοπό: επιτρέπει την απομόνωση της χρονικά μεταβαλλόμενης κλίμακας της κατανομής, έτσι ώστε τα τυποποιημένα residuals να προσεγγίζουν περισσότερο την υπόθεση ανεξαρτησίας. Με τον τρόπο αυτό, το volatility filtering μειώνει τη συσσώρευση υπερβάσεων (violation clustering) που παρατηρείται συχνά στην απλή Historical Simulation, ιδιαίτερα σε περιόδους αυξημένης αστάθειας.

Ωστόσο, πρέπει να τονιστεί ότι, παρότι το EWMA βελτιώνει τη δυναμική προσαρμογή της μεταβλητότητας, δεν εγγυάται από μόνο του ορθή βαθμονόμηση των ακραίων ποσοστημορίων. Η ακρίβεια του VaR εξακολουθεί να εξαρτάται από την εμπειρική κατανομή των residuals, γεγονός που καθιστά αναγκαία την εμπειρική αξιολόγηση της μεθόδου μέσω backtesting. Η διάκριση αυτή είναι κρίσιμη για την ερμηνεία των

αποτελεσμάτων και συνδέεται άμεσα με την ανάλυση unconditional και conditional coverage που ακολουθεί.

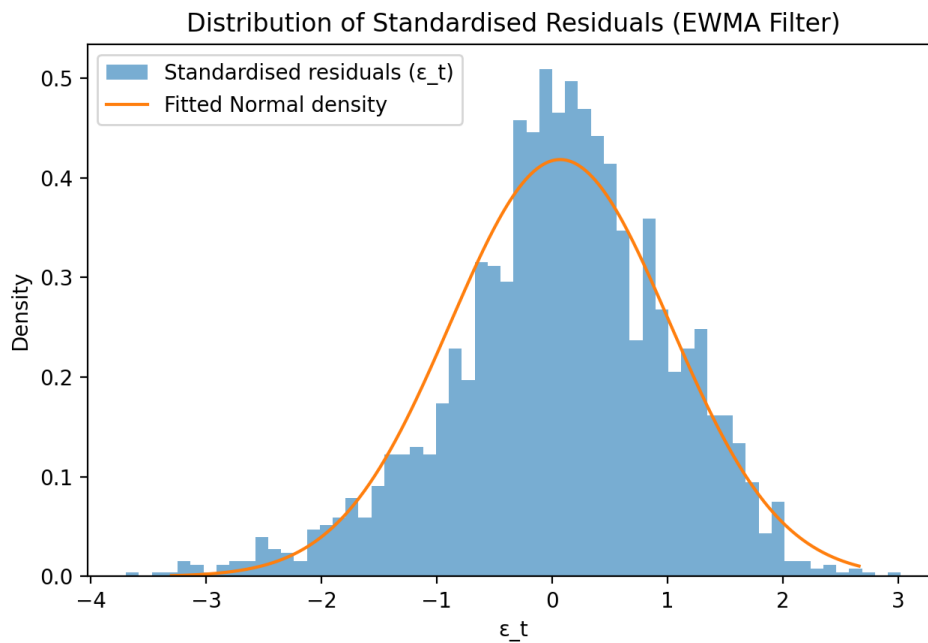
**Γράφημα 3.6.1α**

Μεταβλητότητα EWMA  $\sigma_t$



**Γράφημα 3.6.1β**

Ιστόγραμμα υπολειμμάτων + κανονική επικάλυψη



## 3.6.2 Τυποποιημένα Υπολείμματα και Επαναδειγματοληψία

Οι μοχλευμένες αποδόσεις τυποποιούνται ως

$$(8) \varepsilon_t = \frac{r_t^{(L)}}{\sigma_t}$$

όπου  $\sigma_t$  είναι η υπό όρους τυπική απόκλιση στη χρονική στιγμή  $t$ . Η τυποποίηση αυτή αποσκοπεί στην απομόνωση των στοχαστικών καινοτομιών από τη χρονικά μεταβαλλόμενη κλίμακα της κατανομής των αποδόσεων.

Υπό την υπόθεση ότι το φίλτρο μεταβλητότητας αποτυπώνει επαρκώς τη δυναμική της δεύτερης ροπής, τα τυποποιημένα υπολείμματα  $\varepsilon_t$  αναμένεται να είναι κατά προσέγγιση ανεξάρτητα και ταυτόσημα κατανομημένα. Η υπόθεση αυτή δεν είναι αυστηρή, αλλά λειτουργεί ως λειτουργική προσέγγιση που επιτρέπει τη μη παραμετρική εκτίμηση της κατανομής των shocks. Στην πράξη, τα residuals διατηρούν χαρακτηριστικά όπως ασυμμετρία και βαριές ουρές, ενώ εμφανίζουν σαφώς μειωμένο volatility clustering σε σύγκριση με τις αρχικές αποδόσεις.

Η εμπειρική κατανομή των  $\varepsilon_t$  χρησιμοποιείται στη συνέχεια ως βάση για μη παραμετρική επαναδειγματοληψία (resampling). Συγκεκριμένα, σε κάθε χρονική στιγμή  $t$ , κατασκευάζεται ένα δείγμα τυποποιημένων residuals από ένα κυλιόμενο παράθυρο παρατηρήσεων  $\{\varepsilon_{t-N+1}, \dots, \varepsilon_t\}$ ,

από το οποίο αντλούνται τυχαία, με επανατοποθέτηση,  $M$  ψευδο-καινοτομίες

$$\tilde{\varepsilon}^{(m)}, m = 1, M.$$

Ο αριθμός  $M$  αφορά αποκλειστικά το μέγεθος του δείγματος προσομοίωσης και δεν σχετίζεται με τον χρονικό ορίζοντα πρόβλεψης, γεγονός που διαχωρίζεται ρητά στο παρόν πλαίσιο για την αποφυγή εννοιολογικής σύγχυσης.

Οι ψευδο-καινοτομίες επανακλιμακώνονται με βάση την εκτίμηση της υπό όρους μεταβλητότητας για την επόμενη περίοδο, ώστε να παραχθούν προσομοιωμένες μοχλευμένες αποδόσεις:

$$\tilde{r}_{t+1}^{(L,m)} = \sigma_{t+1|t} \tilde{\varepsilon}^{(m)}$$

Για μονοήμερο χρονικό ορίζοντα ( $h=1$ ), η  $\sigma_{t+1|t}$  λαμβάνεται συνήθως ίση με την τρέχουσα εκτίμηση  $\sigma_t$ , σε συμφωνία με τη λογική του EWMA φίλτρου.

Η διαδικασία αυτή παράγει μια υπό όρους κατανομή των μελλοντικών αποδόσεων, η οποία ενσωματώνει ταυτόχρονα:

- (i) τη δυναμική της μεταβλητότητας μέσω του φίλτρου EWMA, και
- (ii) τη μη παραμετρική μορφή των ουρών της κατανομής μέσω της εμπειρικής κατανομής των residuals.

Το βασικό πλεονέκτημα της προσέγγισης έγκειται στο γεγονός ότι αποφεύγεται η άμεση επιβολή κατανομικών υποθέσεων στις αποδόσεις, ενώ ταυτόχρονα μειώνεται η χρονική

εξάρτηση των υπερβάσεων του VaR. Ωστόσο, πρέπει να τονιστεί ότι η υπόθεση για τα residuals είναι προσεγγιστική και μπορεί να παραβιάζεται σε περιόδους έντονων δομικών μεταβολών ή ακραίων γεγονότων. Κατά συνέπεια, η ακρίβεια του FHS εξαρτάται κρίσιμα από τη σταθερότητα της εμπειρικής κατανομής των residuals και καθιστά αναγκαία τη συστηματική αξιολόγηση της μεθόδου μέσω backtesting.

### 3.6.3 Εκτίμηση του Value-at-Risk στο πλαίσιο του FHS

Μετά την παραγωγή της υπό όρους κατανομής των προσομοιωμένων μοχλευμένων αποδόσεων μέσω της διαδικασίας επαναδειγματοληψίας και επανακλιμάκωσης, η εκτίμηση του Value-at-Risk στο πλαίσιο του Filtered Historical Simulation προκύπτει ως εμπειρικό ποσοστημόριο της κατανομής των αντίστοιχων ζημιών. Συγκεκριμένα, εάν οι προσομοιωμένες αποδόσεις  $\tilde{r}_{t+1}^{(L,m)}$ ,  $m = 1, \dots, M$  μετατραπούν σε ζημίες ως:  $\tilde{L}_{t+1}^{(m)} = -\tilde{r}_{t+1}^{(L,m)}$  τότε το VaR σε επίπεδο εμπιστοσύνης  $\alpha$  ορίζεται ως:

$$(9) \widehat{VaR}_{a,t}^{FHS} = \text{Quantile}_\alpha(\tilde{L}_{t+1}^{(1)}, \dots, \tilde{L}_{t+1}^{(M)})$$

Η εκτίμηση αυτή διατηρεί τη μη παραμετρική φύση της προσέγγισης, καθώς το ακραίο ποσοστημόριο προκύπτει απευθείας από την εμπειρική κατανομή των προσομοιωμένων ζημιών, χωρίς την επιβολή συγκεκριμένης κατανομικής μορφής. Παράλληλα, σε αντίθεση με την απλή Historical Simulation, το FHS ενσωματώνει ρητά την τρέχουσα εκτίμηση της μεταβλητότητας, επιτρέποντας στο VaR να προσαρμόζεται άμεσα σε πρόσφατες μεταβολές του κινδύνου.

Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στη σαφή διάκριση μεταξύ του αριθμού προσομοιώσεων  $M$  και του χρονικού ορίζοντα πρόβλεψης. Ο αριθμός  $M$  αφορά αποκλειστικά το μέγεθος του προσομοιωμένου δείγματος και επηρεάζει τη στατιστική ακρίβεια της εκτίμησης του ποσοστημορίου, ιδίως σε υψηλά επίπεδα εμπιστοσύνης (π.χ. 99%). Μεγαλύτερες τιμές του  $M$  μειώνουν τον προσομοιωτικό θόρυβο και καθιστούν την εκτίμηση του VaR πιο σταθερή, χωρίς ωστόσο να αλλάζουν τον χρονικό ορίζοντα του κινδύνου που μετράται.

Αντιθέτως, ο χρονικός ορίζοντας πρόβλεψης παραμένει αυστηρά μονοήμερος ( $h=1$ ) σε όλη την παρούσα ανάλυση. Η επιλογή αυτή είναι σκόπιμη και αποσκοπεί στη διασφάλιση της συγκρισιμότητας μεταξύ των μεθόδων HS, FHS και Parametric VaR, καθώς και στην αποφυγή πρόσθετων υποθέσεων σχετικά με τη χρονική συσσώρευση των ζημιών. Η επέκταση του FHS σε πολυήμερους ορίζοντες απαιτεί ρητή μοντελοποίηση της διαχρονικής εξάρτησης των αποδόσεων και της δυναμικής της μεταβλητότητας, γεγονός που υπερβαίνει το μεθοδολογικό πλαίσιο της παρούσας εργασίας.

Από θεωρητική άποψη, το FHS αναμένεται να υπερέχει της απλής HS κυρίως ως προς τη χρονική δομή των υπερβάσεων του VaR, καθώς το volatility filtering μειώνει τη

συσσώρευση παραβιάσεων σε περιόδους αυξημένης αστάθειας. Ωστόσο, η ακρίβεια της βαθμονόμησης των ακραίων ποσοστημορίων εξακολουθεί να εξαρτάται από τη σταθερότητα της εμπειρικής κατανομής των residuals. Κατά συνέπεια, η απόδοση του FHS δεν μπορεί να αξιολογηθεί αποκλειστικά σε θεωρητικό επίπεδο, αλλά απαιτεί εμπειρική επαλήθευση μέσω συστηματικού backtesting, όπως υλοποιείται στο επόμενο στάδιο της ανάλυσης.

### 3.7 Parametric (Variance–Covariance) Value-at-Risk

Η παραμετρική μέθοδος Variance–Covariance αποτελεί μία από τις παλαιότερες και πλέον διαδεδομένες προσεγγίσεις εκτίμησης του Value-at-Risk, βασιζόμενη στην υπόθεση ότι οι χρηματοοικονομικές αποδόσεις ακολουθούν υπό όρους κανονική κατανομή. Υπό την παραδοχή αυτή, η κατανομή των ζημιών περιγράφεται πλήρως από τις δύο πρώτες ροπές της, δηλαδή τον υπό όρους μέσο όρο και τη διακύμανση, γεγονός που επιτρέπει την αναλυτική έκφραση του VaR σε κλειστή μορφή.

Η ελκυστικότητα της μεθόδου έγκειται στην απλότητά της και στη χαμηλή υπολογιστική απαίτηση, χαρακτηριστικά που την κατέστησαν ιδιαίτερα δημοφιλή σε πρώιμες εφαρμογές διαχείρισης κινδύνου και σε κανονιστικά πλαίσια. Ωστόσο, η εφαρμογή της σε πραγματικά χρηματοοικονομικά δεδομένα συνεπάγεται την υιοθέτηση ισχυρών κατανομικών υποθέσεων, οι οποίες συχνά παραβιάζονται στην πράξη, ιδίως σε περιόδους έντονης αστάθειας ή κρίσης.

Στην παρούσα εργασία, η παραμετρική προσέγγιση χρησιμοποιείται ρητά ως benchmark απλοποίησης, επιτρέποντας την αξιολόγηση του κόστους που συνεπάγεται η υιοθέτηση της υπόθεσης κανονικότητας σε σχέση με τις μη και ημι-παραμετρικές μεθόδους που εξετάζονται.

#### 3.7.1 Εκτίμηση παραμέτρων

Σε κάθε χρονική στιγμή  $t$ , ο υπό όρους μέσος  $\mu_t$  και η υπό όρους τυπική απόκλιση  $\sigma_t$  εκτιμώνται σε κυλιόμενο παράθυρο μήκους:

$N=250$  trading days.

Η επιλογή του παραθύρου είναι συνεπής με εκείνη που χρησιμοποιείται στις υπόλοιπες μεθόδους, διασφαλίζοντας τη συγκρισιμότητα των αποτελεσμάτων. Ο υπό όρους μέσος εκτιμάται ως ο απλός αριθμητικός μέσος των αποδόσεων εντός του παραθύρου, ενώ η υπό όρους τυπική απόκλιση προκύπτει από την αντίστοιχη δειγματική διακύμανση.

Αξίζει να σημειωθεί ότι, σε ημερήσιο ορίζοντα, η εκτίμηση της μέσης απόδοσης χαρακτηρίζεται από υψηλό στατιστικό θόρυβο και περιορισμένη προβλεπτική ικανότητα. Ως αποτέλεσμα, η συνεισφορά του όρου  $\mu_t$  στην εκτίμηση του VaR είναι συχνά αμελητέα σε σχέση με τον όρο της διακύμανσης. Το ζήτημα αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό σε περιβάλλοντα μόχλευσης, όπου η μεταβλητότητα κυριαρχεί στη διαμόρφωση του βραχυχρόνιου κινδύνου.

### 3.7.2 Κλειστή Μορφή του VaR

Υπό την υπόθεση κανονικότητας, το VaR δίνεται από:

$$(10) \quad \widehat{VaR}_{a,t}^{Parametric} = -\mu_t + z_a \sigma_t$$

όπου  $z_a$  είναι το ποσοστημόριο της τυπικής κανονικής κατανομής.

Η κλειστή αυτή μορφή καθιστά τη μέθοδο ιδιαίτερα διαφανή και εύκολη στην εφαρμογή. Ωστόσο, η παραμετρική φύση της συνεπάγεται ότι το VaR επηρεάζεται άμεσα από την εγκυρότητα της υπόθεσης κανονικότητας. Σε περιβάλλοντα όπου οι αποδόσεις εμφανίζουν ασυμμετρία και βαριές ουρές —χαρακτηριστικά που είναι συστηματικά τεκμηριωμένα για χρηματιστηριακούς δείκτες— η μέθοδος τείνει να υποεκτιμά την πιθανότητα και το μέγεθος των ακραίων ζημιών.

Στο πλαίσιο της παρούσας ανάλυσης, η παραμετρική μέθοδος δεν αποσκοπεί στην ακριβή μέτρηση του κινδύνου ουράς, αλλά λειτουργεί ως σημείο αναφοράς που αναδεικνύει τα πλεονεκτήματα και τις αδυναμίες των εναλλακτικών προσεγγίσεων. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων της με εκείνα της HS και του FHS επιτρέπει την ποσοτική εκτίμηση του κόστους των απλουστευτικών υποθέσεων κανονικότητας, ιδίως σε περιόδους αυξημένης μεταβλητότητας και μόχλευσης.

## 3.8 Μεθοδολογία Backtesting του VaR

Η αξιολόγηση της ποιότητας των εκτιμήσεων Value-at-Risk πραγματοποιείται μέσω διαδικασιών backtesting, οι οποίες εξετάζουν τη συνέπεια μεταξύ των προβλεπόμενων ορίων κινδύνου και των πραγματοποιηθεισών ζημιών. Σε αντίθεση με τη θεωρητική κατασκευή των μεθόδων VaR, το backtesting παρέχει ένα εμπειρικό πλαίσιο ελέγχου της επάρκειας ενός μοντέλου, επιτρέποντας την ανίχνευση τόσο συστηματικών σφαλμάτων βαθμονόμησης όσο και δυναμικών αδυναμιών.

Η βασική ιδέα του backtesting συνίσταται στη σύγκριση, για κάθε χρονική στιγμή, της πραγματικής ζημίας με το εκτιμώμενο VaR της προηγούμενης περιόδου. Στο πλαίσιο αυτό ορίζεται ο δείκτης υπέρβασης (violation indicator) ως:

$$I_t \begin{cases} 1, & \text{αν } L_t > \widehat{VaR}_{a,t-1} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Η ακολουθία  $\{I_t\}$  συνοψίζει πλήρως τη συμπεριφορά ενός μοντέλου VaR ως προς τις υπερβάσεις και αποτελεί τη βάση για τη στατιστική αξιολόγηση της απόδοσής του. Ένα ορθά προδιαγεγραμμένο μοντέλο VaR δεν απαιτεί την πλήρη περιγραφή της κατανομής των ζημιών, αλλά οφείλει να ικανοποιεί δύο θεμελιώδεις ιδιότητες.

### 3.8.1 Unconditional coverage (ορθή βαθμονόμηση)

Η πρώτη ιδιότητα αφορά τη συχνότητα των υπερβάσεων. Υπό ένα σωστά βαθμονομημένο μοντέλο VaR σε επίπεδο εμπιστοσύνης  $\alpha$ , η πιθανότητα υπέρβασης του

ορίου VaR σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή πρέπει να ισούται με  $1-\alpha$ . Ισοδύναμα, ο μέσος ρυθμός υπερβάσεων στο δείγμα backtesting πρέπει να προσεγγίζει την τιμή αυτή.

Η ιδιότητα της unconditional coverage ελέγχει αν το μοντέλο υποεκτιμά ή υπερεκτιμά συστηματικά τον κίνδυνο, χωρίς ωστόσο να λαμβάνει υπόψη τη χρονική διάρθρωση των υπερβάσεων. Ένα μοντέλο μπορεί να εμφανίζει σωστή συνολική συχνότητα violations, αλλά να αποτυγχάνει να αποδώσει τη δυναμική του κινδύνου, εάν οι υπερβάσεις εμφανίζονται συσσωρευμένες σε συγκεκριμένες περιόδους.

### 3.8.2 Independence of violations (χρονική δυναμική)

Η δεύτερη ιδιότητα αφορά την ανεξαρτησία των υπερβάσεων στον χρόνο. Υπό ένα σωστά προδιαγεγραμμένο μοντέλο VaR, οι υπερβάσεις θα πρέπει να εμφανίζονται ως ανεξάρτητα γεγονότα, χωρίς χρονική συσσώρευση (violation clustering). Η παραβίαση της ιδιότητας αυτής υποδηλώνει ότι το μοντέλο αδυνατεί να προσαρμοστεί επαρκώς στη χρονικά μεταβαλλόμενη φύση του κινδύνου, ακόμη και αν η συνολική συχνότητα υπερβάσεων είναι αποδεκτή.

Η ύπαρξη χρονικής εξάρτησης στις υπερβάσεις είναι ιδιαίτερα κρίσιμη σε περιβάλλοντα αυξημένης μεταβλητότητας και μόχλευσης, όπου διαδοχικές αρνητικές αποδόσεις μπορούν να οδηγήσουν σε ταχεία συσσώρευση ζημιών. Στο πλαίσιο αυτό, ο έλεγχος ανεξαρτησίας λειτουργεί ως μέτρο αξιολόγησης της δυναμικής επάρκειας ενός μοντέλου VaR και όχι απλώς της στατικής του βαθμονόμησης.

### 3.8.3 Στατιστικοί έλεγχοι Kupiec και Christoffersen

Οι ιδιότητες της unconditional coverage και της independence of violations ελέγχονται μέσω των δοκιμών Kupiec (1995) και Christoffersen (1998), αντίστοιχα. Ο έλεγχος Kupiec εξετάζει αν ο παρατηρούμενος αριθμός υπερβάσεων είναι συμβατός με τη θεωρητικά αναμενόμενη συχνότητα, ενώ ο έλεγχος Christoffersen επεκτείνει την ανάλυση εξετάζοντας ταυτόχρονα τη συχνότητα και τη χρονική εξάρτηση των violations, μέσω ενός υποδείγματος πρώτης τάξης Markov.

Ο συνδυασμός των δύο ελέγχων επιτρέπει μια πληρέστερη αξιολόγηση της απόδοσης των μοντέλων VaR, διαχωρίζοντας τα προβλήματα βαθμονόμησης από τα προβλήματα δυναμικής προσαρμογής. Η διάκριση αυτή είναι κρίσιμη για την ερμηνεία των εμπειρικών αποτελεσμάτων, καθώς διαφορετικές μέθοδοι VaR μπορεί να αποτυγχάνουν για διαφορετικούς λόγους.

Στην παρούσα εργασία, οι έλεγχοι Kupiec και Christoffersen εφαρμόζονται συστηματικά σε όλες τις εξεταζόμενες μεθόδους και επίπεδα εμπιστοσύνης. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται και αναλύονται διεξοδικά στο Κεφάλαιο 4, με έμφαση όχι μόνο στην απόρριψη ή μη των μηδενικών υποθέσεων, αλλά και στη δομική ερμηνεία των αποτυχιών κάθε μεθοδολογίας.

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4**

### **ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ – ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ VaR ΚΑΙ BACKTESTING ΣΕ ΜΟΧΛΕΥΜΕΝΗ ΘΕΣΗ ΣΤΟΝ S&P 500**

#### 4.1 Σκοπός και ερευνητικό πλαίσιο του Κεφαλαίου

Το παρόν κεφάλαιο εφαρμόζει εμπειρικά το μεθοδολογικό πλαίσιο που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 3 και παρουσιάζει τα αποτελέσματα της εκτίμησης και αξιολόγησης του Value-at-Risk (VaR) για μία συνθετική, μοχλευμένη θέση στον χρηματιστηριακό δείκτη S&P 500. Η ανάλυση αποσκοπεί όχι μόνο στην ποσοτική αποτίμηση του κινδύνου, αλλά κυρίως στη διερεύνηση της ικανότητας διαφορετικών μεθοδολογικών προσεγγίσεων να αποτυπώνουν τη δυναμική του κινδύνου αγοράς υπό συνθήκες αυξημένης μεταβλητότητας και ενισχυμένου κινδύνου ουράς.

Η εμπειρική εφαρμογή επικεντρώνεται αυστηρά σε μονοήμερο χρονικό ορίζοντα πρόβλεψης (one-day-ahead VaR), σε συμφωνία με τη μεθοδολογική οριοθέτηση της εργασίας. Η αξιολόγηση πραγματοποιείται για δύο επίπεδα εμπιστοσύνης,  $\alpha=95\%$  και  $\alpha=99\%$ , τα οποία αντιστοιχούν σε ονομαστικές πιθανότητες ουράς  $p = 1 - \alpha$  ίσες με 5% και 1%, αντίστοιχα. Η επιλογή των επιπέδων αυτών επιτρέπει τη σύγκριση της συμπεριφοράς των μοντέλων τόσο σε σχετικά συχνά όσο και σε σπάνια αλλά ακραία γεγονότα ζημιών, τα οποία είναι ιδιαίτερα κρίσιμα σε περιβάλλοντα μόχλευσης.

Η εκτίμηση του VaR πραγματοποιείται με τρεις εναλλακτικές προσεγγίσεις, οι οποίες αντικατοπτρίζουν διαφορετικές φιλοσοφίες μοντελοποίησης του κινδύνου και είναι πλήρως συνεπείς με τη θεωρητική ανάπτυξη του Κεφαλαίου 3:

- (i) την παραμετρική μέθοδο Variance–Covariance,
- (ii) τη μη παραμετρική μέθοδο Historical Simulation (HS), και
- (iii) την ημι-παραμετρική μέθοδο Filtered Historical Simulation (FHS) με φίλτρο μεταβλητότητας EWMA.

Η ταυτόχρονη εφαρμογή των τριών μεθόδων επιτρέπει την άμεση σύγκριση της επίδρασης των κατανομικών υποθέσεων και της δυναμικής προσαρμογής της μεταβλητότητας στην ποιότητα των εκτιμήσεων VaR, ιδίως σε περιόδους έντονης αστάθειας της αγοράς.

Η αξιολόγηση των εκτιμήσεων πραγματοποιείται μέσω συστηματικού backtesting, με εφαρμογή του ελέγχου Kupiec (Proportion of Failures) για την άνευ όρων κάλυψη (unconditional coverage) και του ελέγχου Christoffersen για την υπό όρους κάλυψη (conditional coverage), ο οποίος εξετάζει συνδυαστικά τόσο τη συχνότητα των υπερβάσεων όσο και τη χρονική ανεξαρτησία τους. Η ανάλυση δεν περιορίζεται στην απλή αναφορά στατιστικών απορρίψεων, αλλά εστιάζει στη δομική ερμηνεία των αποτελεσμάτων, συνδέοντας τις επιδόσεις κάθε μεθόδου με τις θεωρητικές της υποθέσεις και τους εγγενείς περιορισμούς της.

Κρίσιμο στοιχείο της συγκρισιμότητας των αποτελεσμάτων αποτελεί το γεγονός ότι η περίοδος out-of-sample αξιολόγησης είναι κοινή για όλα τα εξεταζόμενα μοντέλα και

περιλαμβάνει  $T^*=2016$  ημερήσιες παρατηρήσεις. Με τον τρόπο αυτό διασφαλίζεται ότι οι παρατηρούμενες διαφορές στην απόδοση των μεθόδων οφείλονται αποκλειστικά στις μεθοδολογικές τους ιδιαιτερότητες και όχι σε διαφοροποιήσεις του δείγματος ή της περιόδου αξιολόγησης.

## 4.2 Προετοιμασία δεδομένων και κατασκευή μεταβλητών

Η εμπειρική ανάλυση βασίζεται στις ημερήσιες τιμές κλεισίματος του δείκτη S&P 500 για την περίοδο Δεκεμβρίου 2015 – Δεκεμβρίου 2025. Από τις τιμές αυτές υπολογίζονται οι συνεχώς ανατοκίζόμενες ημερήσιες αποδόσεις, οι οποίες αποτελούν τη βασική μεταβλητή εισόδου για όλες τις εκτιμήσεις κινδύνου.

Οι ημερήσιες αποδόσεις ορίζονται ως:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

όπου  $P_t$  είναι η τιμή κλεισίματος του δείκτη τη χρηματιστηριακή ημέρα  $t$ .

Στη συνέχεια εφαρμόζεται σταθερός συντελεστής συνθετικής μόχλευσης ίσος με  $L=5$ , σύμφωνα με τη μεθοδολογική επιλογή του Κεφαλαίου 3. Οι μοχλευμένες αποδόσεις ορίζονται ως:

$$r_t^{(L)} = 5r_t$$

και ορίζεται η ημερήσια ζημία ως:

$$L_t = -r_t^{(L)}$$

ώστε θετικές τιμές του  $L_t$  να αντιστοιχούν σε ζημιές.

Για παράδειγμα, εάν  $P_{t-1} = 4000$  και  $P_t = 4080$ , τότε :

$$r_t = \ln\left(\frac{4080}{4000}\right) = \ln(1.02) \approx 0.0198$$

Με μόχλευση  $L=5$ ,

$$r_t^{(L)} \approx 5 \times 0.0198 = 0.099$$

Δηλαδή 9,9%, και η ζημιά ορίζεται ως

$$L_t = -r_t^{(L)} \approx -0.099$$

Στη μεθοδολογία του backtesting οι ζημιές λαμβάνονται ως θετικές τιμές όταν υπάρχει πτώση της αγοράς (δηλαδή όταν  $r_t^{(L)} < 0$ , τότε  $L_t > 0$ )

Για λόγους ποιότητας δεδομένων και αριθμητικής συνέπειας, το σύνολο των υπολογισμών οργανώνεται σε Excel φύλλα εργασίας (worksheets), με τις βασικές

στήλες: Ημερομηνία, Κλείσιμο, log returns, μοχλευμένες αποδόσεις και ζημιές. Οι υπολογισμοί του VaR και των δεικτών υπερβάσεων πραγματοποιούνται σε ξεχωριστά φύλλα (Parametric, HS, FHS), ενώ τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα backtesting παρουσιάζονται σε φύλλο σύνοψης.

### 4.3 Εκτίμηση VaR με Parametric (Variance–Covariance) μοντέλο

#### 4.3.1 Εκτίμηση rolling μέσου και rolling μεταβλητότητας

Η παραμετρική προσέγγιση Variance–Covariance βασίζεται στην υπόθεση ότι η υπό όρους κατανομή των ημερήσιων μοχλευμένων αποδόσεων μπορεί να προσεγγιστεί επαρκώς από κανονική κατανομή, η οποία χαρακτηρίζεται πλήρως από δύο παραμέτρους: τον υπό όρους μέσο όρο  $\mu_t$  και την υπό όρους τυπική απόκλιση  $\sigma_t$ .

Στο πλαίσιο της παρούσας εμπειρικής ανάλυσης, οι παράμετροι αυτές εκτιμώνται σε κυλιόμενο παράθυρο μήκους  $N=250$  χρηματιστηριακών ημερών, το οποίο αντιστοιχεί περίπου σε ένα έτος δεδομένων και αποτελεί τυπική επιλογή τόσο στη βιβλιογραφία του VaR όσο και στην τραπεζική πρακτική. Για κάθε χρονική στιγμή  $t$ , οι εκτιμήσεις βασίζονται αποκλειστικά στις τελευταίες 250 παρατηρήσεις της μοχλευμένης απόδοσης  $r_t^{(L)}$ , διασφαλίζοντας ότι οι προβλέψεις VaR είναι αυστηρά out-of-sample.

Ο υπό όρους μέσος όρος εκτιμάται ως:

$$(11) \quad \mu_t = \frac{1}{250} \sum_{i=1}^{250} r_{t-i}^{(L)}$$

ενώ η υπό όρους τυπική απόκλιση εκτιμάται ως:

$$(12) \quad \sigma_t = \sqrt{\frac{1}{249} \sum_{i=1}^{250} (r_{t-i}^{(L)} - \mu_t)^2}$$

Η εκτίμηση των παραμέτρων πραγματοποιείται σε ημερήσια βάση, με ανανέωση του παραθύρου κατά μία παρατήρηση σε κάθε χρονικό βήμα. Η διαδικασία αυτή επιτρέπει στο μοντέλο να προσαρμόζεται σταδιακά σε μεταβολές της μεταβλητότητας, χωρίς όμως να ενσωματώνει ρητά μηχανισμούς δυναμικής μεταβλητότητας (όπως volatility clustering), γεγονός που αποτελεί εγγενή περιορισμό της παραμετρικής προσέγγισης.

Ιδιαίτερη σημασία έχει η εκτίμηση του υπό όρους μέσου  $\mu_t$  στον ημερήσιο ορίζοντα. Στην πράξη, και ιδίως σε μονοήμερες προβλέψεις VaR, ο μέσος όρος των αποδόσεων είναι συνήθως πολύ μικρός σε σχέση με τη διακύμανση, ενώ η εκτίμησή του υπόκειται σε σημαντικό στατιστικό θόρυβο. Στο παρόν δείγμα, οι εκτιμήσεις του  $\mu_t$  κινούνται τυπικά σε τάξη μεγέθους πολύ μικρότερη από την αντίστοιχη  $\sigma_t$ , ιδιαίτερα μετά την εφαρμογή μόχλευσης  $L=5$ , όπου η μεταβλητότητα ενισχύεται δυσανάλογα.

Η συμπερίληψη του  $\mu_t$  στο Parametric VaR διατηρείται για λόγους θεωρητικής πληρότητας και συνέπειας με την κλασική διατύπωση του μοντέλου. Ωστόσο, όπως θα φανεί στα αποτελέσματα backtesting, η περιορισμένη πληροφοριακή αξία του ημερήσιου

μέσου και η αδυναμία του μοντέλου να συλλάβει απότομες μεταβολές της μεταβλητότητας συμβάλλουν ουσιαστικά στις παρατηρούμενες αποτυχίες του Parametric VaR, ιδίως σε περιόδους κρίσης και υπό συνθήκες μόχλευσης.

Η ενότητα αυτή θέτει τη βάση για την εκτίμηση των ορίων VaR κλειστής μορφής και για τη μετέπειτα αξιολόγηση της εμπειρικής απόδοσης του μοντέλου μέσω backtesting.

#### 4.3.2 Parametric VaR σε όρους ζημίας

Το VaR στο επίπεδο εμπιστοσύνης  $\alpha$  υπολογίζεται ως:

$$VaR_{\alpha,t} = -\mu_t + z_{\alpha}\sigma_t$$

όπου  $z_{0.95}=1.645$  και  $z_{0.99}=2.33$ . Η διατύπωση αυτή είναι συνεπής με τον ορισμό VaR σε όρους ζημίας (loss), καθώς το αποτέλεσμα είναι ένα θετικό όριο που ερμηνεύεται ως “μέγιστη αναμενόμενη ζημία” στο δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης.

Έστω ότι από το rolling παράθυρο  $N=250$  εκτιμάται  $\mu_t=0.0003$  και  $\sigma_t=0.012$ .

Τότε:

$$VaR_{0.95,t} = -0.0003 + 1.645 \times 0.012 = 0.01944$$

δηλαδή  $\sim 1.94\%$  one-day loss, ενώ

$$VaR_{0.99,t} = -0.0003 + 2.33 \times 0.012 = 0.02766$$

δηλαδή  $\sim 2.77\%$  one-day loss.

## 4.4 Εκτίμηση VaR με Historical Simulation (HS)

### 4.4.1 Μη παραμετρική κατασκευή της εμπειρικής κατανομής ζημιών

Η μέθοδος Historical Simulation (HS) εκτιμά το Value-at-Risk χωρίς την επιβολή οποιασδήποτε παραμετρικής υπόθεσης σχετικά με τη μορφή της κατανομής των αποδόσεων. Αντ’ αυτού, βασίζεται αποκλειστικά στην εμπειρική κατανομή των παρατηρούμενων ζημιών εντός ενός κυλιόμενου ιστορικού παραθύρου, υιοθετώντας την παραδοχή ότι το πρόσφατο παρελθόν αποτελεί αντιπροσωπευτικό δείγμα του άμεσου μελλοντικού κινδύνου.

Στην παρούσα ανάλυση, για κάθε χρονική στιγμή  $t$ , χρησιμοποιείται κυλιόμενο παράθυρο μήκους  $N=250$  χρηματιστηριακών ημερών, το οποίο περιλαμβάνει τις τελευταίες παρατηρήσεις της ημερήσιας μοχλευμένης ζημίας:

$$\{L_{t-249}, \dots, L_t\}.$$

Οι ζημίες αυτές ταξινομούνται σε αύξουσα σειρά, σχηματίζοντας την εμπειρική κατανομή των απωλειών του χαρτοφυλακίου για το αντίστοιχο χρονικό παράθυρο.

Για δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης  $\alpha$ , το VaR εκτιμάται ως το αντίστοιχο εμπειρικό ποσοστημόριο της κατανομής. Ενδεικτικά, σε ένα τυπικό rolling παράθυρο  $N=250$  ημερών, εάν το εμπειρικό 95ο ποσοστημόριο των ζημιών ισούται με 0.021, τότε το μονοήμερο VaR στο επίπεδο 95% εκτιμάται ως:

$$\widehat{VaR}_{0,95,t}^{HS} = 0,021$$

δηλαδή η μέγιστη αναμενόμενη ημερήσια ζημία, με πιθανότητα 95%, ανέρχεται σε 2.1% επί των ιδίων κεφαλαίων για τη συγκεκριμένη μοχλευμένη θέση.

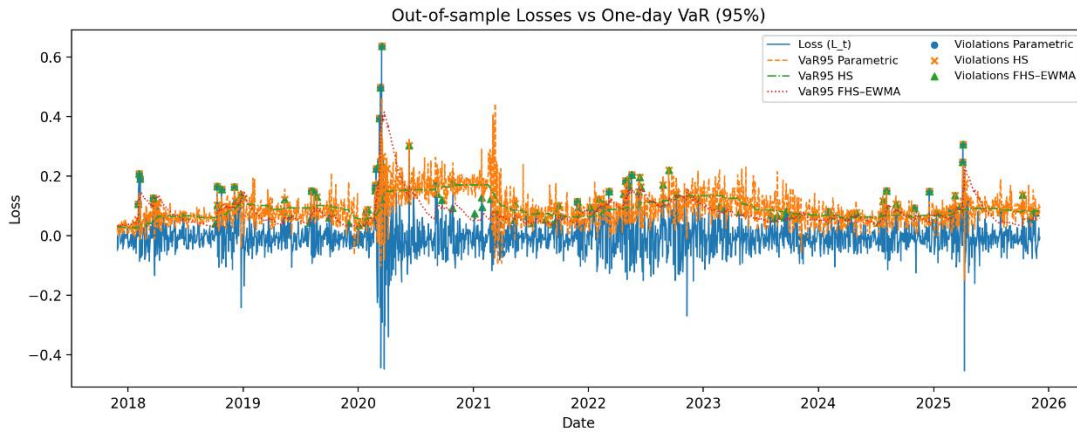
Η ίδια διαδικασία εφαρμόζεται για το αυστηρότερο επίπεδο εμπιστοσύνης 99%, όπου το VaR προσδιορίζεται από το αντίστοιχο ακραίο ποσοστημόριο της εμπειρικής κατανομής. Καθώς το επίπεδο  $\alpha$  αυξάνεται, η εκτίμηση του VaR βασίζεται σε ολοένα και λιγότερες παρατηρήσεις της αριστερής ουράς, γεγονός που καθιστά τη μέθοδο ιδιαίτερα ευαίσθητη στη σύνθεση του ιστορικού παραθύρου.

Τα Γραφήματα 4.3α και 4.3β απεικονίζουν τη χρονική εξέλιξη των πραγματοποιηθέντων ημερήσιων ζημιών σε σύγκριση με τα αντίστοιχα όρια VaR στο 95% και στο 99%. Η γραφική αυτή απεικόνιση επιτρέπει μια άμεση οπτική αξιολόγηση της απόδοσης της μεθόδου HS, αναδεικνύοντας τόσο τις μεμονωμένες υπερβάσεις όσο και τη χρονική τους συγκέντρωση.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι, σε περιόδους αυξημένης μεταβλητότητας, οι υπερβάσεις του HS VaR τείνουν να εμφανίζονται σε συστάδες (violation clustering), γεγονός που αντανακλά την αδυναμία της μεθόδου να προσαρμόζεται γρήγορα σε αλλαγές του καθεστώτος κινδύνου. Επειδή όλες οι παρατηρήσεις εντός του παραθύρου λαμβάνουν ίσο βάρος, η HS αντιδρά με καθυστέρηση σε απότομες αυξήσεις της μεταβλητότητας, ιδίως όταν το ιστορικό παράθυρο περιλαμβάνει μεγάλο ποσοστό «ήρεμων» ημερών.

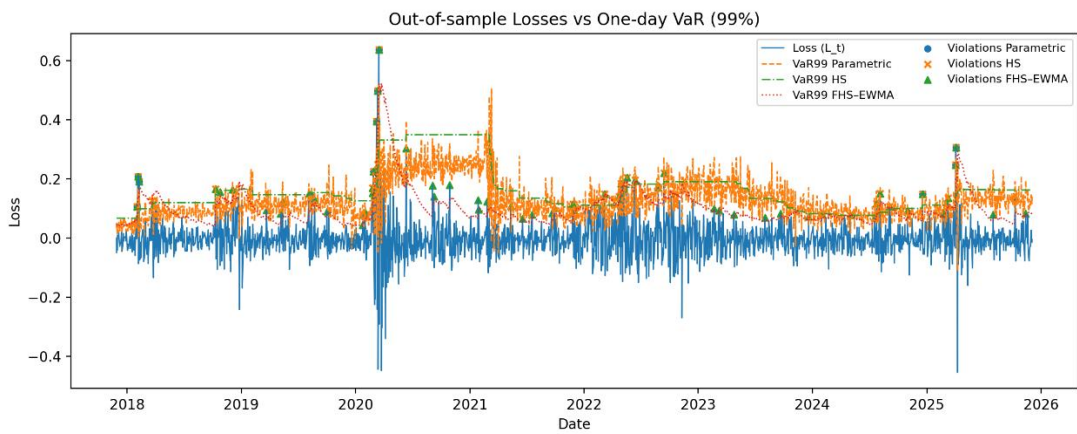
Η αδυναμία αυτή καθίσταται ιδιαίτερα έντονη υπό συνθήκες μόχλευσης, καθώς η ενίσχυση των αποδόσεων οδηγεί σε δυσανάλογη διόγκωση των ακραίων ζημιών. Κατά συνέπεια, ακόμη και μικρή υποεκτίμηση του εμπειρικού quantile μπορεί να μεταφραστεί σε συχνότερες και σοβαρότερες υπερβάσεις, ιδίως στο επίπεδο 99%, όπως θα επιβεβαιωθεί και από τα αποτελέσματα του backtesting στο επόμενο υποκεφάλαιο.

Γράφημα 4.3α Ζημίες έναντι VaR 95% + παραβιάσεις



Γράφημα 4.3β

Ζημίες έναντι VaR 99% + παραβιάσεις



## 4.5 Εκτίμηση VaR με Filtered Historical Simulation (FHS–EWMA)

### 4.5.1 Φιλτράρισμα μεταβλητότητας μέσω EWMA

Η μέθοδος Filtered Historical Simulation (FHS) αναπτύχθηκε ως επέκταση της απλής Historical Simulation, με στόχο την αντιμετώπιση της βασικής αδυναμίας της τελευταίας να προσαρμόζεται αποτελεσματικά στη χρονικά μεταβαλλόμενη μεταβλητότητα των χρηματοοικονομικών αποδόσεων. Ενώ η HS αποδίδει ίσο βάρος σε όλες τις ιστορικές παρατηρήσεις, η FHS εισάγει έναν μηχανισμό φιλτραρίσματος της μεταβλητότητας, επιτρέποντας στο μοντέλο να ανταποκρίνεται ταχύτερα σε αλλαγές του καθεστώτος κινδύνου.

Στο πλαίσιο της παρούσας ανάλυσης, η υπό όρους μεταβλητότητα εκτιμάται μέσω ενός σχήματος Exponentially Weighted Moving Average (EWMA), το οποίο ορίζεται αναδρομικά ως:

$$(13) \quad \sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda)(r_t^{(L)})^2$$

όπου  $\lambda=0.94$  για ημερήσια δεδομένα. Η επιλογή της παραμέτρου αυτής συνεπάγεται ότι οι πρόσφατες αποδόσεις λαμβάνουν μεγαλύτερο βάρος στον υπολογισμό της μεταβλητότητας σε σχέση με παλαιότερες παρατηρήσεις. Ως αποτέλεσμα, η εκτίμηση της  $\sigma_t$  προσαρμόζεται ταχύτερα σε περιόδους απότομης αύξησης της μεταβλητότητας, χαρακτηριστικό που απουσιάζει από τη βασική Historical Simulation.

Η εισαγωγή του EWMA είναι ιδιαίτερα κρίσιμη στο πλαίσιο της παρούσας μελέτης, καθώς η εφαρμογή μόχλευσης  $L=5$  ενισχύει τη διακύμανση των αποδόσεων και καθιστά πιο έντονες τις επιπτώσεις του φαινομένου volatility clustering. Σε τέτοιες συνθήκες, μοντέλα που δεν επιτρέπουν χρονικά μεταβαλλόμενη μεταβλητότητα τείνουν να υποεκτιμούν τον κίνδυνο κατά τη μετάβαση από περιόδους χαμηλής σε περιόδους υψηλής μεταβλητότητας.

Παρά τα πλεονεκτήματα αυτά, το EWMA παραμένει ένα σχετικά απλοποιημένο υπόδειγμα μεταβλητότητας, καθώς δεν επιτρέπει ασυμμετρία μεταξύ θετικών και αρνητικών αποδόσεων ούτε ενσωματώνει πλήρως μη γραμμικές δυναμικές κινδύνου. Η επιλογή του στο παρόν πλαίσιο είναι συνειδητή, καθώς επιτυγχάνει ισορροπία μεταξύ υπολογιστικής απλότητας και δυναμικής προσαρμογής της μεταβλητότητας, επιτρέποντας σαφή σύγκριση με τις μεθόδους HS και Parametric VaR.

Η εκτίμηση της μεταβλητότητας μέσω EWMA αποτελεί το πρώτο στάδιο της διαδικασίας FHS και χρησιμοποιείται στη συνέχεια για την τυποποίηση των αποδόσεων και την κατασκευή της υπό όρους κατανομής ζημιών, όπως παρουσιάζεται στην επόμενη ενότητα.

### 4.5.2 Τυποποιημένα υπολείμματα και επανακλιμάκωση ποσοστημορίων

Στο δεύτερο στάδιο της μεθόδου Filtered Historical Simulation, οι μοχλευμένες αποδόσεις τυποποιούνται μέσω της εκτιμώμενης υπό όρους μεταβλητότητας, με σκοπό

τον διαχωρισμό της δυναμικής της μεταβλητότητας από τη μορφή της κατανομής των καινοτομιών.

Τα τυποποιημένα υπολείμματα (standardised residuals) ορίζονται ως:

$$\varepsilon_t = \frac{r_t^{(L)}}{\sigma_t}$$

Η διαδικασία αυτή αποσκοπεί στην απομάκρυνση του φαινομένου volatility clustering από τη χρονοσειρά αποδόσεων. Υπό την παραδοχή ότι το φίλτρο μεταβλητότητας έχει απορροφήσει τη χρονική εξάρτηση της διακύμανσης, τα υπολείμματα  $\varepsilon_t$  θεωρείται ότι προσεγγίζουν μια διαδικασία ανεξάρτητων και ταυτόσημα κατανεμημένων μεταβλητών. Με τον τρόπο αυτό, η εμπειρική κατανομή των residuals μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μη παραμετρική εκτίμηση της κατανομής των shocks της αγοράς.

Στη συνέχεια, η μέθοδος FHS υπολογίζει το VaR μέσω της επανακλιμάκωσης των εμπειρικών ποσοστημορίων των residuals με βάση την τρέχουσα εκτίμηση της μεταβλητότητας. Συγκεκριμένα, το VaR στο επίπεδο εμπιστοσύνης  $\alpha$  προκύπτει ως:

$$VaR_{\alpha,t}^{FHS} \approx \sigma_t * q_{\alpha}(\varepsilon)$$

Η προσέγγιση αυτή επιτρέπει στο μοντέλο να διατηρεί τη μη παραμετρική μορφή της κατανομής των shocks, ενώ ταυτόχρονα προσαρμόζει δυναμικά το επίπεδο κινδύνου μέσω της χρονικά μεταβαλλόμενης μεταβλητότητας. Σε αντίθεση με την απλή Historical Simulation, όπου όλα τα ιστορικά δεδομένα αντιμετωπίζονται ισοβαρώς, η FHS επιτρέπει στην τρέχουσα εκτίμηση της μεταβλητότητας να επηρεάζει άμεσα το ύψος του VaR.

Για παράδειγμα, εάν η εκτίμηση EWMA της μεταβλητότητας δίνει:

$\sigma_t=0.015$  και το 95ο ποσοστημόριο των residuals είναι  $q_{0.95}(\varepsilon)=1.80$ . Τότε:

$$VaR_{0.95,t}^{FHS} \approx 0.015 \times 1.80 = 0.027$$

δηλαδή ~2.7% μονοήμερη ζημία.

Η διαδικασία αυτή επιτρέπει στο FHS να ανταποκρίνεται ταχύτερα σε μεταβολές της αγοράς σε σχέση με τη βασική Historical Simulation, καθώς το επίπεδο κινδύνου προσαρμόζεται άμεσα στις πρόσφατες μεταβολές της μεταβλητότητας. Ωστόσο, η αποτελεσματικότητα της μεθόδου εξαρτάται κρίσιμα από την ορθότητα της εκτίμησης της μεταβλητότητας και από τη σταθερότητα της εμπειρικής κατανομής των residuals, παράγοντες που επηρεάζουν ιδιαίτερα την ακρίβεια των ακραίων ποσοστημορίων και θα αξιολογηθούν εμπειρικά μέσω της διαδικασίας backtesting.

## 4.6 Backtesting: Ορισμός υπέρβασης και βασικές αρχές αξιολόγησης

Η αξιολόγηση της ποιότητας των εκτιμήσεων Value-at-Risk πραγματοποιείται μέσω της διαδικασίας backtesting, η οποία εξετάζει τη συνέπεια μεταξύ των προβλεπόμενων ορίων VaR και των πραγματοποιηθεισών ζημιών του χαρτοφυλακίου. Το backtesting αποτελεί θεμελιώδες εργαλείο τόσο στην ακαδημαϊκή βιβλιογραφία όσο και στη ρυθμιστική πρακτική, καθώς επιτρέπει τον έλεγχο της αξιοπιστίας των μοντέλων κινδύνου με βάση πραγματικά δεδομένα.

Για κάθε μοντέλο και επίπεδο εμπιστοσύνης ορίζεται ο δείκτης υπέρβασης (violation indicator):

$$I_t \begin{cases} 1, & \text{αν } L_t > \widehat{VaR}_{\alpha,t-1} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Η μεταβλητή αυτή λαμβάνει τιμή ίση με 1 όταν η πραγματοποιηθείσα ζημία υπερβαίνει το προβλεπόμενο όριο VaR και 0 σε αντίθετη περίπτωση. Η χρήση του  $\widehat{VaR}_{\alpha,t-1}$  διασφαλίζει ότι η αξιολόγηση βασίζεται σε πραγματικά out-of-sample προβλέψεις.

Η ακολουθία των δεικτών υπέρβασης αποτελεί δυαδική χρονοσειρά, η οποία συνοψίζει τη δυναμική απόδοση του μοντέλου VaR. Ένα ορθά προδιαγεγραμμένο μοντέλο κινδύνου θα πρέπει να ικανοποιεί δύο θεμελιώδεις ιδιότητες.

### Unconditional Coverage

Η πρώτη ιδιότητα αφορά τη συχνότητα εμφάνισης των υπερβάσεων. Θεωρητικά, εάν το VaR εκτιμάται σωστά στο επίπεδο εμπιστοσύνης  $\alpha$ , τότε η πιθανότητα υπέρβασης πρέπει να ισούται με:

$$p = 1 - \alpha$$

Για παράδειγμα:

- Στο επίπεδο 95%, αναμένεται περίπου 5% των παρατηρήσεων να υπερβαίνουν το VaR.
- Στο επίπεδο 99%, αναμένεται περίπου 1% των παρατηρήσεων να οδηγεί σε υπέρβαση.

Η ιδιότητα αυτή εξετάζει αν το μοντέλο αποτυπώνει σωστά τη συνολική ένταση του κινδύνου. Υπερβολικά πολλές υπερβάσεις υποδηλώνουν υποεκτίμηση κινδύνου, ενώ υπερβολικά λίγες υποδηλώνουν υπερεκτίμηση κινδύνου και πιθανή αναποτελεσματική χρήση κεφαλαίων.

### Independence of Violations

Η δεύτερη ιδιότητα αφορά τη χρονική δομή των υπερβάσεων. Ακόμη και αν ο συνολικός αριθμός violations είναι θεωρητικά σωστός, ένα μοντέλο μπορεί να θεωρηθεί ανεπαρκές εάν οι υπερβάσεις εμφανίζονται σε συστάδες (violation clustering).

Η ανεξαρτησία των υπερβάσεων σημαίνει ότι η πιθανότητα μιας υπέρβασης δεν επηρεάζεται από το αν συνέβη υπέρβαση την προηγούμενη ημέρα. Παραβίαση αυτής της ιδιότητας υποδηλώνει ότι το μοντέλο δεν ενσωματώνει επαρκώς τη δυναμική της μεταβλητότητας και αποτυγχάνει να προσαρμόσει εγκαίρως τις προβλέψεις κινδύνου σε περιόδους αυξημένου stress.

Το φαινόμενο clustering είναι ιδιαίτερα σημαντικό υπό συνθήκες μόχλευσης, όπου συνεχόμενες αρνητικές αποδόσεις μπορούν να οδηγήσουν σε διαδοχικές υπερβάσεις και αυξημένο κίνδυνο ρευστότητας ή αναγκαστικής απομόχλευσης.

### Στατιστική αξιολόγηση των ιδιοτήτων VaR

Οι δύο παραπάνω ιδιότητες αξιολογούνται μέσω καθιερωμένων στατιστικών δοκιμών:

- Ο έλεγχος Kupiec (Proportion-of-Failures test) εξετάζει αν ο συνολικός αριθμός υπερβάσεων είναι συμβατός με την θεωρητική πιθανότητα ουράς.
- Ο έλεγχος Christoffersen εξετάζει ταυτόχρονα την ανεξαρτησία των υπερβάσεων και τη συνολική επάρκεια του μοντέλου (conditional coverage).

Οι δοκιμές αυτές εφαρμόζονται εμπειρικά στις επόμενες ενότητες, επιτρέποντας συστηματική σύγκριση των Parametric, Historical Simulation και Filtered Historical Simulation μοντέλων.

### 4.7 Kupiec POF: Άνευ όρων κάλυψη (Unconditional Coverage)

Ο έλεγχος Kupiec εξετάζει αν ο παρατηρούμενος αριθμός υπερβάσεων  $n$  είναι συμβατός με Bernoulli διαδικασία πιθανότητας  $p=1-\alpha$ . Το στατιστικό likelihood ratio είναι:

$$(14) \quad LR_{POF} = -2 \ln \left( \frac{(1-p)^{T^* - np^n}}{(1-\hat{p})^{T^* - n\hat{p}^n}} \right), \hat{p} = \frac{n}{T^*}$$

και ακολουθεί ασυμπτωτικά  $\chi^2(1)$

#### Παράδειγμα:

Για το Parametric VaR στο 95%, σε out-of-sample δείγμα  $T^*=2016$  ημερών, παρατηρούνται  $n=49$  υπερβάσεις, άρα:

$$\hat{p} = \frac{49}{2016} \approx 0.0243$$

χαμηλότερο από το θεωρητικό  $p=0.05$ , υποδεικνύοντας συντηρητική εκτίμηση κινδύνου (over-coverage).

## 4.8 Christoffersen: Independence και Conditional Coverage

### 4.8.1 Markov προσέγγιση και μεταβάσεις $n_{ij}$

Ο έλεγχος Christoffersen αντιμετωπίζει τη διαδικασία  $I_t$  ως αλυσίδα Markov πρώτης τάξης και καταγράφει τις μεταβάσεις:

- $n_{00}$ :  $0 \rightarrow 0$
- $n_{01}$ :  $0 \rightarrow 1$
- $n_{10}$ :  $1 \rightarrow 0$
- $n_{11}$ :  $1 \rightarrow 1$

Ορίζονται:

$$\pi_0 = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}}, \pi_1 = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}}, \pi = \frac{n_{01} + n_{11}}{n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11}}$$

Η ανεξαρτησία αντιστοιχεί στην ισότητα  $\pi_0 = \pi_1$ . Το στατιστικό  $LR_{ind}$  ακολουθεί  $\chi^2(1)$ . Η conditional coverage προκύπτει ως:

$$(15) \quad LR_{CC} = LR_{POF} + LR_{ind} \sim \chi^2(2)$$

### 4.8.2 Ενδεικτική πράξη – HS 95%

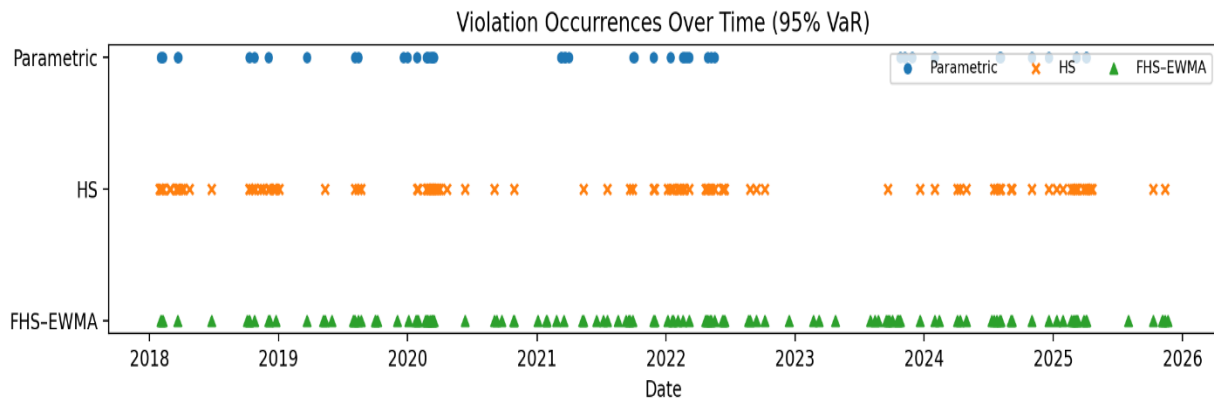
Για το HS VaR στο 95% προκύπτουν:

$n_{00}=1807, n_{01}=95, n_{10}=95, n_{11}=18$  και συνεπώς:

$$\pi_0 = \frac{95}{1807+95} \approx 0,04995, \pi_1 = \frac{18}{95+18} \approx 0.15929$$

Η σημαντική απόκλιση  $\pi_1 > \pi_0$  υποδηλώνει clustering υπερβάσεων, συμβατό με το stylized fact του volatility clustering.

Γράφημα 4.8 Χρονοδιάγραμμα παραβίασης για 95%



#### 4.9 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα backtesting ( $T^*=2016$ )

Η out-of-sample περίοδος περιλαμβάνει  $T^*=2016$  παρατηρήσεις. Οι παρατηρούμενες υπερβάσεις  $n$  και οι αντίστοιχοι έλεγχοι Kupiec/Christoffersen συγκεντρώνονται στον παρακάτω πίνακα

**Πίνακας 4.8α**

Αποτελέσματα Kupiec & Christoffersen

Μοντέλο	$\alpha$	$T^*$	$n$	$\hat{p}$ (= $n/T^*$ )	LR_POF	p-value (POF)	LR_ind	p-value (ind)	LR_CC	p-value (CC)
Parametric (V/C)	0.95	2016	49	0.0243	34.299	4.73e-09	10.794	0.0010	45.094	1.61e-10
Parametric (V/C)	0.99	2016	16	0.0079	0.933	0.3341	7.742	0.0054	8.675	0.0700
Historical Simulation (HS)	0.95	2016	113	0.0561	1.498	0.2209	16.982	3.77e-05	18.480	9.71e-05
Historical Simulation (HS)	0.99	2016	34	0.0169	7.957	0.0048	14.036	0.00018	21.993	1.68e-05
Filtered HS (FHS– EWMA)	0.95	2016	125	0.0620	5.701	0.0170	2.310	0.1286	8.011	0.0182
Filtered HS (FHS– EWMA)	0.99	2016	66	0.0327	65.927	4.68e-16	1.355	0.2444	67.282	2.45e-15

**Πίνακας 4.8β**

## Σύνοψη Αποτελεσμάτων Backtesting

Μοντέλο	$\alpha$	Unconditional Coverage (Kupiec)	Independence (Christoffersen)	Conditional Coverage
Parametric (V/C)	0.95	Fail	Fail	Fail
Parametric (V/C)	0.99	Pass	Fail	Fail (οριακό)
Historical Simulation (HS)	0.95	Pass	Fail	Fail
Historical Simulation (HS)	0.99	Fail	Fail	Fail
Filtered HS (FHS-EWMA)	0.95	Fail	Pass	Fail
Filtered HS (FHS-EWMA)	0.99	Fail	Pass	Fail

**4.10 Ερμηνεία αποτελεσμάτων ανά μέθοδο**

## 4.10.1 Parametric (Variance-Covariance) VaR

**Parametric 95% :**

Ο έλεγχος Christoffersen για την ανεξαρτησία των υπερβάσεων απορρίπτει τη μηδενική υπόθεση για το Parametric VaR στο 95% επίπεδο εμπιστοσύνης. Συγκεκριμένα, το στατιστικό  $LR_{ind}=34.30$  υπερβαίνει κατά πολύ την κρίσιμη τιμή της  $\chi^2(1)$ , υποδηλώνοντας ισχυρή συσσώρευση (clustering) των υπερβάσεων στον χρόνο. Το αποτέλεσμα αυτό συνάδει με τη γνωστή αδυναμία των variance-covariance προσεγγίσεων να συλλάβουν επαρκώς τη δυναμική της μεταβλητότητας σε περιόδους αυξημένης πίεσης στις αγορές.

**Parametric 99%:**

Για το Parametric VaR στο 99%, οι μεταβάσεις υπερβάσεων δίνουν  $n_{00}=1985$ ,  $n_{01}=14$ ,  $n_{10}=14$ ,  $n_{11}=2$ . Συνεπώς,  $\pi_0=14/(1985+14)=0.0070$  και  $\pi_1=2/(14+2)=0.125$ , γεγονός που υποδηλώνει αυξημένη πιθανότητα υπέρβασης μετά από προηγούμενη υπέρβαση (violation clustering). Ο έλεγχος Kupiec δεν απορρίπτει την άνευ όρων κάλυψη ( $LR_{POF}=0.933$ ,  $p \approx 0.334$ ), ενώ ο έλεγχος Christoffersen απορρίπτει την ανεξαρτησία των υπερβάσεων ( $LR_{ind} \approx 7.742$ ,  $p \approx 0.005$ ). Η conditional coverage εμφανίζεται οριακή ( $LR_{CC} \approx 8.675$ ,  $p \approx 0.070$ ), υποδεικνύοντας ότι, παρότι η συνολική συχνότητα υπερβάσεων είναι συμβατή με το 99%, η χρονική τους δομή δεν είναι τυχαία.

## 4.10.2 Historical Simulation (HS)

**HS 95% :**

Για το HS VaR στο 95%, οι μεταβάσεις υπερβάσεων δίνουν  $n_{00}=1807$ ,  $n_{01}=95$ ,  $n_{10}=95$ ,  $n_{11}=18$ . Συνεπώς,  $\pi_0=95/(1807+95)=0.04995$  και  $\pi_1=18/(95+18)=0.15929$ , γεγονός που υποδηλώνει αυξημένη πιθανότητα υπέρβασης μετά από προηγούμενη υπέρβαση (violation clustering). Ο έλεγχος Kupiec δεν απορρίπτει την άνευ όρων κάλυψη ( $LR_{POF}=1.498$ ,  $p\approx 0.221$ ), ωστόσο ο έλεγχος Christoffersen απορρίπτει την ανεξαρτησία ( $LR_{ind}\approx 16.981$ ,  $p\approx 3.8\times 10^{-5}$ ). Κατά συνέπεια, η conditional coverage απορρίπτεται ( $LR_{CC}\approx 18.480$ ,  $p\approx 9.7\times 10^{-5}$ ), υποδεικνύοντας ότι, παρότι το HS προσεγγίζει ικανοποιητικά τη συνολική συχνότητα υπερβάσεων, δεν αναπαράγει σωστά τη χρονική τους κατανομή.

**HS 99% :**

Για το HS VaR στο 99%, οι μεταβάσεις υπερβάσεων δίνουν  $n_{00}=1952$ ,  $n_{01}=29$ ,  $n_{10}=29$ ,  $n_{11}=5$ . Συνεπώς,  $\pi_0=29/(1952+29)=0.01464$  και  $\pi_1=5/(29+5)=0.14706$ , γεγονός που υποδηλώνει έντονη συσσώρευση υπερβάσεων (violation clustering). Ο έλεγχος Kupiec απορρίπτει την άνευ όρων κάλυψη ( $LR_{POF}=7.957$ ,  $p\approx 0.00479$ ), ενώ ο έλεγχος Christoffersen απορρίπτει και την ανεξαρτησία των υπερβάσεων ( $LR_{ind}\approx 14.036$ ,  $p\approx 0.000179$ ). Κατά συνέπεια, η conditional coverage απορρίπτεται έντονα ( $LR_{CC}\approx 21.993$ ,  $p\approx 1.68\times 10^{-5}$ ), υποδεικνύοντας ότι το HS υποεκτιμά ή/και δεν προσαρμόζεται επαρκώς στον ακραίο κίνδυνο ουράς στο επίπεδο 99%.

## 4.10.3 Filtered Historical Simulation (FHS–EWMA)

**FHS 95% :**

Για το FHS VaR στο 95%, οι μεταβάσεις υπερβάσεων δίνουν  $n_{00}=1777$ ,  $n_{01}=113$ ,  $n_{10}=113$ ,  $n_{11}=12$ . Συνεπώς,  $\pi_0=113/(1777+113)=0.0598$  και  $\pi_1=12/(113+12)=0.096$ , υποδεικνύοντας ηπιότερη τάση συσσώρευσης υπερβάσεων σε σχέση με το HS. Ο έλεγχος ανεξαρτησίας Christoffersen δεν απορρίπτει τη μηδενική υπόθεση ( $LR_{ind}\approx 2.310$ ,  $p\approx 0.129$ ), γεγονός που υποδηλώνει ότι το volatility filtering μέσω EWMA βελτιώνει τη χρονική δομή των violations. Αντίθετα, ο έλεγχος Kupiec απορρίπτει την άνευ όρων κάλυψη ( $LR_{POF}=5.701$ ,  $p\approx 0.017$ ), και συνεπώς η conditional coverage απορρίπτεται επίσης ( $LR_{CC}\approx 8.011$ ,  $p\approx 0.018$ ).

**FHS 99% :**

Για το FHS VaR στο 99%, οι μεταβάσεις υπερβάσεων δίνουν  $n_{00}=1887$ ,  $n_{01}=62$ ,  $n_{10}=62$ ,  $n_{11}=4$ . Συνεπώς,  $\pi_0=62/(1887+62)=0.0318$  και  $\pi_1=4/(62+4)=0.0606$ , ενώ ο έλεγχος ανεξαρτησίας δεν απορρίπτει τη μηδενική υπόθεση ( $LR_{ind}\approx 1.355$ ,  $p\approx 0.244$ ). Ωστόσο, ο έλεγχος Kupiec απορρίπτει συντριπτικά την άνευ όρων κάλυψη ( $LR_{POF}=65.927$ ,  $p\approx 4.7\times 10^{-16}$ ), υποδεικνύοντας σοβαρή απόκλιση του εμπειρικού ρυθμού υπερβάσεων από το ονομαστικό 1%. Πράγματι, παρατηρούνται περίπου  $n=66$  υπερβάσεις σε  $T^*=2016$  ημέρες ( $\hat{p}\approx 0.0327$ ), γεγονός που συνεπάγεται συστηματική υποεκτίμηση του ακραίου κινδύνου ουράς από το FHS στο επίπεδο 99%. Κατά συνέπεια, η conditional coverage απορρίπτεται επίσης ( $LR_{CC}\approx 67.282$ ,  $p\approx 2.5\times 10^{-15}$ ).

## 4.11 Συνολική αξιολόγηση και σύνδεση με τη μεθοδολογία του Κεφαλαίου 3

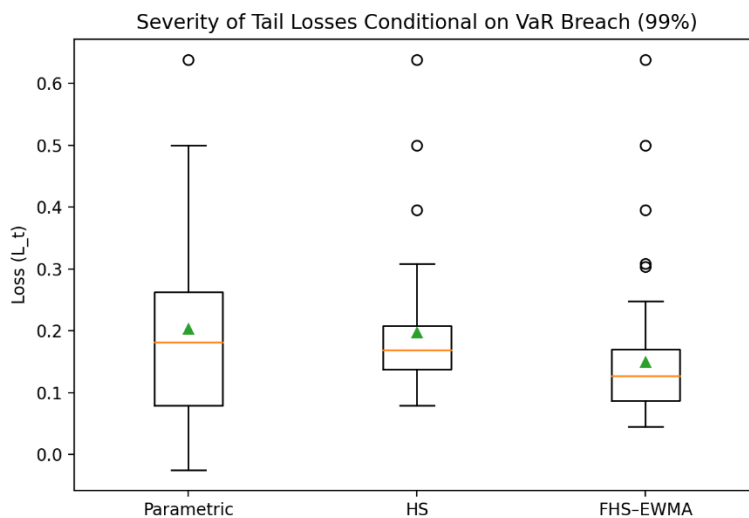
Η συγκριτική εικόνα του Πίνακα 4.8α και του Πίνακα 4.8β αναδεικνύει ότι η αξιολόγηση ενός μοντέλου VaR δεν εξαντλείται στη “σωστή” συχνότητα υπερβάσεων (unconditional coverage), αλλά απαιτεί και έλεγχο της χρονικής δομής τους (independence). Η εμπειρική συμπεριφορά των αποδόσεων υπό μόχλευση, ιδίως σε περιβάλλοντα με volatility clustering και tail events, οδηγεί συχνά σε αποτυχία των μοντέλων ως προς την ανεξαρτησία, ακόμη και όταν η unconditional coverage φαίνεται ικανοποιητική.

Ειδικότερα, τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι:

- το Parametric VaR παρουσιάζει έντονο clustering (απόρριψη independence),
- το HS VaR αποτυγχάνει ιδιαίτερα στο 99% (απόρριψη τόσο unconditional όσο και conditional coverage),
- το FHS βελτιώνει τη χρονική συμπεριφορά (independence “περνά”), αλλά εμφανίζει σημαντικές αποκλίσεις στην unconditional coverage, ιδίως στο 99%, όπου οι υπερβάσεις είναι υπερβολικά πολλές.

Η εικόνα αυτή είναι πλήρως συμβατή με τη θεωρητική συζήτηση του Κεφαλαίου 3: η εισαγωγή volatility filtering μπορεί να βελτιώσει τη δυναμική προσαρμογή (άρα και να μειώσει clustering), αλλά η ακρίβεια των ακραίων quantiles παραμένει κρίσιμη, ιδιαίτερα σε περιβάλλοντα βαριών ουρών.

Γράφημα 4.11 Severity tail losses (99%) με boxplot



## 4.12 Σύνοψη Κεφαλαίου

Το Κεφάλαιο 4 παρουσίασε την πλήρη εμπειρική εφαρμογή των μοντέλων VaR και την αξιολόγησή τους μέσω Kupiec και Christoffersen σε κοινή out-of-sample περίοδο  $T^*=2016$ . Παρουσιάστηκαν οι διαδικασίες υπολογισμού σε rolling πλαίσιο και ενσωματώθηκαν αριθμητικά παραδείγματα (“μία πράξη”) ώστε να καθίσταται αναπαραγώγιμη η μεθοδολογία. Τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα δείχνουν ότι κανένα μοντέλο δεν περνά πλήρως την conditional coverage σε όλα τα επίπεδα εμπιστοσύνης, ενώ η συμπεριφορά των violations διαφοροποιείται σημαντικά μεταξύ μοντέλων και επιπέδων ουράς.

Το επόμενο κεφάλαιο συνοψίζει τα βασικά συμπεράσματα και αναπτύσσει τις προεκτάσεις της ανάλυσης για τη διαχείριση κινδύνου υπό μόχλευση.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ, ΕΠΙΠΤΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ, ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΙΣ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

#### 5.1 Εισαγωγή

Το παρόν κεφάλαιο συνοψίζει και ερμηνεύει τα βασικά ευρήματα της διπλωματικής εργασίας, συνδέοντάς τα συστηματικά με τη θεωρητική και μεθοδολογική ανάπτυξη των προηγούμενων κεφαλαίων και αναδεικνύοντας τις πρακτικές προεκτάσεις για τη διαχείριση κινδύνου αγοράς (market risk) υπό συνθήκες μόχλευσης. Η εμπειρική ανάλυση επικεντρώθηκε σε μοχλευμένη θέση (x5) επί του δείκτη S&P 500, ενώ αξιολογήθηκαν τρεις προσεγγίσεις VaR—Parametric (variance–covariance), Historical Simulation (HS) και Filtered Historical Simulation (FHS–EWMA)—με backtesting μέσω Kupiec (unconditional coverage) και Christoffersen (independence/conditional coverage), σε κοινή out-of-sample περίοδο  $T^*=2016$ .

Η αξία της συνεισφοράς της εργασίας δεν εντοπίζεται μόνο στην “αριθμητική” σύγκριση μοντέλων, αλλά πρωτίστως στη συστηματική ανάδειξη της διάκρισης μεταξύ: (i) ακριβούς συχνότητας υπερβάσεων (calibration στον ρυθμό violations), και (ii) ορθής δυναμικής συμπεριφοράς των υπερβάσεων (απουσία clustering), η οποία είναι κρίσιμη σε πλαίσια κεφαλαιακής επάρκειας, risk limits και ρυθμιστικών ελέγχων.

#### 5.2 Συνοπτική παρουσίαση βασικών εμπειρικών ευρημάτων

Η εμπειρική αξιολόγηση κατέδειξε ότι τα μοντέλα διαφέρουν ουσιαστικά τόσο ως προς την unconditional coverage όσο και ως προς την independence/conditional coverage, ιδίως όταν ο κίνδυνος ενισχύεται μέσω μόχλευσης. Τα ευρήματα μπορούν να συνοψιστούν σε τέσσερα κεντρικά σημεία.

##### 5.2.1 Η συχνότητα υπερβάσεων δεν αρκεί: ο ρόλος του clustering

Τα αποτελέσματα ανέδειξαν ότι ένα μοντέλο μπορεί να εμφανίζει αποδεκτή άνευ όρων κάλυψη (δηλαδή ο συνολικός αριθμός violations να είναι “κοντά” στον θεωρητικό) αλλά να αποτυγχάνει στην independence. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό διότι η χρονική συσσώρευση των υπερβάσεων υποδηλώνει ότι το μοντέλο δεν ενσωματώνει επαρκώς την υπό όρους δυναμική μεταβλητότητα και, επομένως, αποτυγχάνει να προσαρμόσει τα risk estimates σε περιόδους αυξημένου stress.

Στο πλαίσιο αυτό, τα Parametric και HS μοντέλα εμφάνισαν συστηματικά ισχυρά στοιχεία violation clustering (απόρριψη ανεξαρτησίας), γεγονός που συνάδει με την ύπαρξη volatility clustering στις χρηματοοικονομικές αποδόσεις και με την ενίσχυση των tail κινδύνων λόγω μόχλευσης.

### 5.2.2 Το Parametric (variance–covariance) VaR: συντηρητικότητα αλλά ανεπαρκής δυναμική

Το Parametric VaR παρουσίασε αξιοσημείωτη διαφοροποίηση μεταξύ των δύο επιπέδων εμπιστοσύνης. Στο 95%, ο παρατηρούμενος ρυθμός υπερβάσεων ήταν σημαντικά χαμηλότερος από τον θεωρητικό, υποδηλώνοντας over-coverage (συντηρητική εκτίμηση). Ωστόσο, η ανεξαρτησία απορρίφθηκε έντονα, ένδειξη ότι το μοντέλο δεν περιγράφει σωστά την χρονική διάρθρωση του κινδύνου. Στο 99%, η unconditional coverage ήταν αποδεκτή (δηλαδή η συχνότητα violations ήταν συμβατή με το 1%), αλλά η independence παρέμεινε προβληματική, με την conditional coverage να εμφανίζει οριακή συμπεριφορά. Ερμηνευτικά, αυτό σημαίνει ότι το μοντέλο μπορεί να είναι “καλά βαθμονομημένο” στον μέσο ρυθμό υπερβάσεων, αλλά να υστερεί στη δυναμική προσαρμογή όταν η αγορά μεταβαίνει μεταξύ καθεστώτων (normal → crisis).

Η διαπίστωση αυτή έχει ιδιαίτερη σημασία, διότι σε εφαρμογές risk management, η αποτυχία independence μεταφράζεται σε αυξημένη πιθανότητα πολλαπλών συνεχόμενων ημερών με VaR breaches, δηλαδή σε ένα περιβάλλον όπου τα risk limits και οι κεφαλαιακοί δείκτες πιέζονται διαδοχικά.

### 5.2.3 Το Historical Simulation: αποδεκτό στο 95% αλλά αδύναμο στο 99%

Η μέθοδος HS, ως μη-παραμετρική προσέγγιση, έχει το πλεονέκτημα ότι δεν επιβάλλει συγκεκριμένη θεωρητική κατανομή στις αποδόσεις και μπορεί να ενσωματώσει εμπειρικά heavy tails. Ωστόσο, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η HS εμφανίζει ισχυρές αδυναμίες όταν αξιολογείται σε αυστηρό επίπεδο ουράς (99%). Στο 95%, η HS ήταν συμβατή με την unconditional coverage, αλλά απέτυχε στην independence (clustering) και επομένως στην conditional coverage. Στο 99%, η HS απέτυχε τόσο στην unconditional coverage όσο και στην independence, οδηγώντας σε καθολική απόρριψη της conditional coverage.

Η συμπεριφορά αυτή είναι αναμενόμενη σε δείγματα όπου το ιστορικό παράθυρο δεν περιέχει επαρκή αριθμό ακραίων tail events ή όπου τα καθεστώτα μεταβάλλονται με τρόπο που καθιστά το πρόσφατο ιστορικό “μη αντιπροσωπευτικό” του άμεσου μέλλοντος. Η διαπίστωση είναι ιδιαίτερα κρίσιμη υπό μόχλευση, διότι η ίδια ιστορική ακραία κίνηση, όταν πολλαπλασιάζεται με  $L=5$ , μπορεί να οδηγήσει σε πολύ συχνότερες και βαρύτερες υπερβάσεις.

### 5.2.4 Το Filtered Historical Simulation: βελτιώνει την independence αλλά αποτυγχάνει στο 99% quantile

Το FHS (με EWMA volatility filter) εμφάνισε την πιο “ενδιαφέρουσα” συμπεριφορά, καθώς βελτίωσε τη χρονική δομή των υπερβάσεων: τόσο στο 95% όσο και στο 99% οι έλεγχοι independence δεν απορρίφθηκαν, υποδηλώνοντας ότι η εισαγωγή ενός volatility filter μπορεί να απορροφήσει σημαντικό μέρος του volatility clustering και να μειώσει τη συσσώρευση παραβιάσεων. Αυτό αποτελεί ισχυρή ένδειξη υπεροχής των “υπό όρους”

προσεγγίσεων έναντι των απλών ιστορικών quantiles, τουλάχιστον ως προς την δυναμική συμπεριφορά του κινδύνου.

Παρά ταύτα, η unconditional coverage του FHS απέτυχε και στα δύο επίπεδα, με δραματική απόκλιση στο 99%, όπου παρατηρήθηκε υπερβολικά υψηλός ρυθμός υπερβάσεων. Το εύρημα αυτό υποδηλώνει ότι, ενώ το volatility filtering μπορεί να βελτιώσει τη χρονική κατανομή των violations, δεν εγγυάται από μόνο του ορθή βαθμονόμηση του ακραίου quantile, ειδικά όταν τα residual shocks εξακολουθούν να εμφανίζουν έντονα heavy tails ή structural breaks που δεν αποτυπώνονται επαρκώς από την εμπειρική κατανομή σε rolling πλαίσιο.

### 5.3 Οικονομική ερμηνεία των αποτελεσμάτων υπό μόχλευση

#### 5.3.1 Η μόχλευση ως μηχανισμός ενίσχυσης του tail risk

Η εφαρμογή σταθερής μόχλευσης  $L=5$  έχει δύο βασικές συνέπειες:

- (α) αυξάνει γραμμικά την κλίμακα των ημερήσιων μεταβολών, και
- (β) ενισχύει τις ουρές της κατανομής ζημιών σε επίπεδο ιδίων κεφαλαίων, καθιστώντας τα tail events οικονομικά πιο κρίσιμα.

Σε ένα τέτοιο περιβάλλον, η αξιολόγηση των μοντέλων VaR γίνεται πιο απαιτητική, διότι ακόμη και μικρές υποεκτιμήσεις της μεταβλητότητας ή του quantile οδηγούν σε συχνότερα breaches. Επιπλέον, η μόχλευση αυξάνει την πιθανότητα “cascade effects”: μια ακολουθία ημερών με αρνητικές αποδόσεις μπορεί να προκαλέσει margin calls, forced deleveraging και επιπρόσθετη μεταβλητότητα, δηλαδή μη-γραμμικές δυναμικές που δεν συλλαμβάνονται από απλά στατικά μοντέλα.

#### 5.3.2 Καθεστώς αγοράς και ρυθμιστική σημασία

Η διάκριση normal vs crisis periods, που θεμελιώθηκε στο Κεφάλαιο 3, είναι κρίσιμη ερμηνευτικά. Σε περιόδους κρίσης, τόσο η μεταβλητότητα όσο και οι συσχετίσεις μεταβάλλονται απότομα και οι κατανομές αποκλίνουν από την κανονικότητα. Σε αυτό το περιβάλλον, ένα VaR μοντέλο μπορεί να αποτυγχάνει όχι επειδή “υπολογίζει λάθος” μαθηματικά, αλλά επειδή η βασική παραδοχή σταθερότητας της κατανομής στο rolling window παραβιάζεται.

Αυτό έχει ρυθμιστικές προεκτάσεις. Τα VaR μοντέλα χρησιμοποιούνται για κεφαλαιακές απαιτήσεις, risk limits και internal models. Ένα μοντέλο που εμφανίζει clustering παραβιάζει την αρχή ότι τα violations πρέπει να είναι “σπάνια και τυχαία” γεγονότα υπό ορθή προδιαγραφή. Συνεπώς, η αποτυχία independence/conditional coverage αποτελεί ισχυρό σήμα model risk.

### 5.4 Επιπτώσεις για την πρακτική διαχείριση κινδύνου (Risk Management Implications)

#### 5.4.1 Model risk και επιλογή μεθοδολογίας

Τα αποτελέσματα υπογραμμίζουν ότι η επιλογή VaR μεθοδολογίας δεν είναι ουδέτερη. Κάθε προσέγγιση ενσωματώνει διαφορετικό τύπο model risk:

- **Parametric (V/C):** model risk λόγω υποθέσεων κατανομής και ανεπαρκούς δυναμικής μεταβλητότητας.
- **HS:** model risk λόγω dependence on recent history και αδυναμίας σύλληψης out-of-sample extremes όταν το παράθυρο δεν περιλαμβάνει επαρκή tails.
- **FHS:** μειωμένο clustering αλλά πιθανή miscalibration στα ακραία quantiles, ειδικά αν τα residuals εμφανίζουν structural breaks ή αν η εμπειρική κατανομή τους είναι ασταθής.

Από την άποψη ενός risk manager, το “καλύτερο” μοντέλο δεν είναι αναγκαστικά εκείνο που περνά έναν μόνο έλεγχο. Η αξιολόγηση πρέπει να γίνεται πολυδιάστατα (coverage, independence, severity beyond VaR), και συχνά απαιτείται συνδυασμός με stress testing και ES (Expected Shortfall).

#### 5.4.2 Risk limits, governance και backtesting culture

Η empirical evidence clustering στα Parametric/HS υποδεικνύει ότι τα μοντέλα αυτά μπορούν να οδηγήσουν σε περιόδους όπου οι παραβιάσεις συσσωρεύονται, επιβαρύνοντας τα risk limits. Σε οργανωτικά πλαίσια (risk governance), αυτό επιβάλλει:

- σαφή κανόνες escalation όταν εμφανίζεται sequence violations,
- επανεκτίμηση του παραθύρου N ή της δυναμικής μεταβλητότητας,
- συμπληρωματική χρήση volatility regimes και stress VaR.

Η ανάλυση επιβεβαιώνει ότι το backtesting πρέπει να αντιμετωπίζεται ως συνεχής διαδικασία model validation και όχι ως τυπική “tick-the-box” συμμόρφωση.

#### 5.4.3 Από το VaR στο Expected Shortfall: φυσική επέκταση

Δεδομένης της παρατήρησης ότι η συχνότητα/δομή των violations δεν επαρκεί για να περιγράψει την ουρά, η φυσική επέκταση είναι η μετάβαση σε Expected Shortfall (ES), το οποίο μετρά τον μέσο όρο ζημιών υπό υπέρβαση. Πρακτικά, ακόμη και αν ένα μοντέλο περνά την unconditional coverage, μπορεί να αποτυγχάνει στο να αποτυπώσει τη σοβαρότητα των tail losses. Η προσέγγιση ES θα ήταν ιδιαίτερα κατάλληλη υπό μόχλευση, όπου η οικονομική σημασία των tail events είναι δυσανάλογα μεγάλη.

## 5.5 Περιορισμοί της παρούσας μελέτης

Παρότι η εργασία παρέχει σαφή συμπεράσματα, πρέπει να αναγνωριστούν οι εξής περιορισμοί:

1. **Μονοδιάστατη έκθεση κινδύνου (single-index):** Η ανάλυση βασίζεται σε έναν δείκτη (S&P 500), χωρίς πολυ-asset χαρτοφυλάκιο. Σε πραγματικά χαρτοφυλάκια, οι συσχετίσεις και οι cross-asset δυναμικές είναι κρίσιμες.
2. **Σταθερή μόχλευση (L=5):** Η μόχλευση αντιμετωπίστηκε ως σταθερή, ενώ στην πράξη μπορεί να είναι time-varying λόγω margin constraints και risk limits.

3. **Απλοποίηση θεσμικών τριβών:** Δεν ενσωματώθηκαν κόστη χρηματοδότησης, bid-ask spreads, liquidity constraints, margin calls και forced liquidation. Αυτά μπορούν να ενισχύσουν τον κίνδυνο σε μη-γραμμικό βαθμό.
4. **Επιλογή παραθύρου  $N=250$ :** Η επιλογή είναι τυπική, αλλά η ευαισθησία του αποτελέσματος σε εναλλακτικά  $N$  (π.χ. 500 ή 1000) μπορεί να είναι ουσιώδης.
5. **EWMA αντί για πλήρως παραμετρικά volatility models:** Το FHS χρησιμοποίησε EWMA για tractability. Μοντέλα τύπου GARCH ή stochastic volatility ενδέχεται να προσφέρουν βελτιωμένη προσαρμογή σε καθεστώτα κρίσης.

## 5.6 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα (Future Research Directions)

Βάσει των παραπάνω, προτείνονται οι ακόλουθες κατευθύνσεις:

1. **Επέκταση σε Expected Shortfall (ES) και backtesting ES:** Δεδομένης της ρυθμιστικής στροφής προς ES, η σύγκριση VaR–ES υπό μόχλευση θα παρείχε πιο ολοκληρωμένο πλαίσιο tail risk.
2. **Time-varying leverage και endogenous deleveraging:** Εισαγωγή κανόνων μόχλευσης που εξαρτώνται από μεταβλητότητα ή drawdowns (risk targeting), ώστε να αναλυθεί η επίδραση στη συχνότητα/δομή tail events.
3. **Regime-switching μοντέλα:** Χρήση Markov-switching volatility ή mixture distributions ώστε να αποτυπωθεί ρητά η μετάβαση normal→crisis.
4. **Πολυπαραγοντικά / πολυ-asset χαρτοφυλάκια:** Εισαγωγή correlation dynamics και joint tail dependence (copulas) για ρεαλιστικότερη αποτίμηση κινδύνου.
5. **Συνδυασμός VaR με stress testing:** Ανάπτυξη stress VaR (π.χ. calibration σε crisis windows) και αξιολόγηση σε out-of-sample periods υψηλής μεταβλητότητας.
6. **Model averaging / ensemble risk measures:** Συνδυασμός προβλέψεων VaR από πολλαπλά μοντέλα με weights που εξαρτώνται από πρόσφατα backtesting performance metrics, ώστε να μειωθεί το model risk.

## 5.7 Τελικό συμπέρασμα

Η παρούσα διπλωματική εργασία ανέδειξε εμπειρικά ότι, σε περιβάλλον μόχλευσης, η αξιολόγηση VaR μοντέλων πρέπει να εστιάζει όχι μόνο στη συχνότητα υπερβάσεων (unconditional coverage), αλλά και στη χρονική δομή τους (independence/conditional coverage). Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι τα Parametric και HS μοντέλα είναι ιδιαίτερα

ευάλωτα σε violation clustering, ενώ το FHS–EWMA βελτιώνει τη χρονική ανεξαρτησία αλλά μπορεί να αποτυγχάνει δραματικά στη βαθμονόμηση του ακραίου quantile (99%).

Σε πρακτικό επίπεδο, τα ευρήματα υποδεικνύουν ότι οι οργανισμοί διαχείρισης κινδύνου που λειτουργούν υπό μόχλευση θα πρέπει να υιοθετούν πολυ-κριτηριακή αξιολόγηση των risk models, να ενσωματώνουν δυναμικά volatility frameworks, και να συμπληρώνουν το VaR με stress testing και measures τύπου Expected Shortfall, ώστε να επιτυγχάνεται ρεαλιστικότερη και πιο ανθεκτική αποτίμηση του tail risk.